

TÔN THÂN (Chủ biên) - VŨ HỮU BÌNH - TRẦN ĐÌNH CHÂU  
PHẠM GIA ĐỨC - PHẠM ĐỨC QUANG - NGUYỄN DUY THUẬN

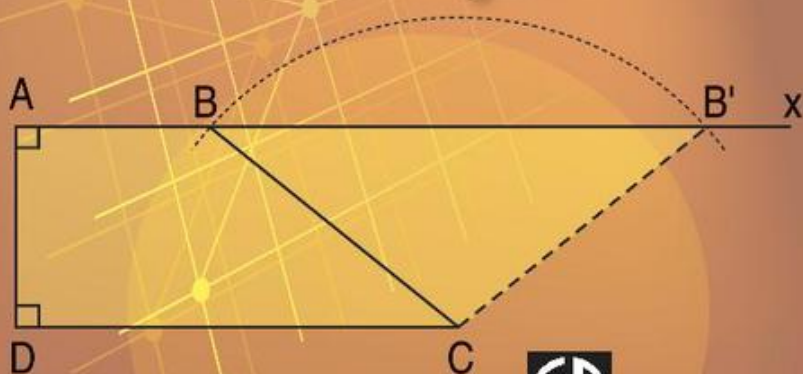
8

TẬP MỘT

# BÀI TẬP TOÁN



$$\frac{20x^2 - 45}{(2x + 3)^2}$$



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM  
timdapan.com

TÔN THÂN (Chủ biên)  
VŨ HỮU BÌNH - TRẦN ĐÌNH CHÂU  
PHẠM GIA ĐỨC - PHẠM ĐỨC QUANG - NGUYỄN DUY THUẬN

Bài tập  
**TOÁN 8**  
**TẬP MỘT**

*(Tái bản lần thứ mười sáu)*

**NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM**

**Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam**

---

01 - 2020/CXBIPH/157 - 869/GD

Mã số : 2B803T0

## LỜI NÓI ĐẦU

Trong những năm qua, bộ sách Bài tập Toán từ lớp 6 đến lớp 9 do chính các tác giả sách giáo khoa Toán THCS biên soạn đã được sử dụng kèm theo sách giáo khoa và đã mang lại những hiệu quả thiết thực. Bộ sách đã là một tài liệu bổ ích giúp các thầy, cô giáo có thêm tư liệu trong việc soạn giảng, giúp các em học sinh tự học, tự rèn luyện kỹ năng, qua đó củng cố được kiến thức cơ bản, hình thành phương pháp giải toán, tăng thêm khả năng vận dụng kiến thức và góp phần rèn luyện tư duy toán học.

Để đáp ứng tốt hơn nhu cầu ngày càng cao của các thầy, cô giáo và các em học sinh, chúng tôi tiến hành chỉnh lí và bổ sung bộ sách bài tập hiện có theo hướng tạo nhiều cơ hội hơn nữa để các em học sinh được củng cố kiến thức toán học cơ bản, được rèn luyện kỹ năng theo **Chuẩn kiến thức, kỹ năng** trong **Chương trình Giáo dục phổ thông** được Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành ngày 5 tháng 5 năm 2006. Nói chung, ở mỗi "xoắn" (§), cuối mỗi chương sẽ có thêm phần **Bài tập bổ sung**. Trong phần này, có thể có các *câu hỏi trắc nghiệm khách quan* để các em học sinh tự kiểm tra, đánh giá mức độ nắm vững kiến thức của mình. Một số dạng bài tập chưa có trong sách giáo khoa cũng được bổ sung nhằm làm phong phú thêm các thể loại bài tập, giúp các em học sinh tập được vận dụng kiến thức trong nhiều tình huống khác nhau. Bộ sách cũng được bổ sung một số bài tập dành cho các em học sinh khá, giỏi. Những bài tập này được đánh dấu "\*". Bên cạnh đó, các tác giả cũng chú ý chỉnh sửa cách diễn đạt ở một số chỗ cho thích hợp và dễ hiểu hơn.



Chúng tôi hi vọng rằng với việc chỉnh lí và bổ sung như trên, bộ sách Bài tập Toán từ lớp 6 đến lớp 9 sẽ góp phần tích cực hơn nữa trong việc nâng cao chất lượng dạy và học môn Toán ở các trường THCS trong cả nước, đáp ứng tốt hơn nữa nhu cầu đa dạng của các đối tượng học sinh khác nhau.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng song bộ sách khó tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các thầy, cô giáo và bạn đọc gần xa để trong các lần tái bản sau bộ sách được hoàn thiện hơn. Xin chân thành cảm ơn.

Hà Nội, tháng 10 năm 2009

**CÁC TÁC GIẢ**

# PHẦN ĐẠI SỐ

---

## Chương I

### PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

#### ĐỀ BÀI

#### §1. Nhân đơn thức với đa thức

1. Làm tính nhân :

a)  $3x(5x^2 - 2x - 1)$  ;

b)  $(x^2 + 2xy - 3)(-xy)$  ;

c)  $\frac{1}{2}x^2y(2x^3 - \frac{2}{5}xy^2 - 1)$ .

2. Rút gọn các biểu thức sau :

a)  $x(2x^2 - 3) - x^2(5x + 1) + x^2$  ;

b)  $3x(x - 2) - 5x(1 - x) - 8(x^2 - 3)$  ;

c)  $\frac{1}{2}x^2(6x - 3) - x\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(x + 4)$ .

3. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a)  $P = 5x(x^2 - 3) + x^2(7 - 5x) - 7x^2$  tại  $x = -5$  ;

b)  $Q = x(x - y) + y(x - y)$  tại  $x = 1,5$  và  $y = 10$ .

4. Chứng tỏ rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến :

a)  $x(5x - 3) - x^2(x - 1) + x(x^2 - 6x) - 10 + 3x$  ;

b)  $x(x^2 + x + 1) - x^2(x + 1) - x + 5$ .

5. Tìm x, biết :

$2x(x - 5) - x(3 + 2x) = 26$ .

## Bài tập bổ sung

1.1. Làm tính nhân :

$$2x^2(5x^3 - 4x^2y - 7xy + 1).$$

1.2. Rút gọn biểu thức :

$$2x(3x^3 - x) - 4x^2(x - x^2 + 1) + (x - 3x^2)x.$$

## §2. Nhân đa thức với đa thức

6. Thực hiện phép tính :

a)  $(5x - 2y)(x^2 - xy + 1)$  ;

b)  $(x - 1)(x + 1)(x + 2)$  ;

c)  $\frac{1}{2}x^2y^2(2x + y)(2x - y)$ .

7. Thực hiện phép tính :

a)  $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)(2x - 3)$  ;

b)  $(x - 7)(x - 5)$  ;

c)  $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(4x - 1)$ .

8. Chứng minh :

a)  $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$  ;

b)  $(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)(x - y) = x^4 - y^4$ .

9. Cho a và b là hai số tự nhiên. Biết a chia cho 3 dư 1 ; b chia cho 3 dư 2. Chứng minh rằng ab chia cho 3 dư 2.

10. Chứng minh rằng biểu thức  $n(2n - 3) - 2n(n + 1)$  luôn chia hết cho 5 với mọi số nguyên n.

## Bài tập bổ sung

2.1. Kết quả của phép tính  $(x - 5)(x + 3)$  là :

(A)  $x^2 - 15$  ;

(B)  $x^2 - 8x - 15$  ;

(C)  $x^2 + 2x - 15$  ;

(D)  $x^2 - 2x - 15$ .

Hãy chọn kết quả đúng.

2.2. Chứng minh rằng biểu thức  $(n - 1)(3 - 2n) - n(n + 5)$  chia hết cho 3 với mọi giá trị của n.

### §3, 4, 5. Những hằng đẳng thức đáng nhớ

11. Tính :

a)  $(x + 2y)^2$  ;      b)  $(x - 3y)(x + 3y)$  ;      c)  $(5 - x)^2$ .

12. Tính :

a)  $(x - 1)^2$  ;      b)  $(3 - y)^2$  ;      c)  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ .

13. Viết các biểu thức sau dưới dạng bình phương của một tổng :

a)  $x^2 + 6x + 9$  ;      b)  $x^2 + x + \frac{1}{4}$  ;      c)  $2xy^2 + x^2y^4 + 1$ .

14. Rút gọn biểu thức :

a)  $(x + y)^2 + (x - y)^2$  ;  
b)  $2(x - y)(x + y) + (x + y)^2 + (x - y)^2$  ;  
c)  $(x - y + z)^2 + (z - y)^2 + 2(x - y + z)(y - z)$ .

15. Biết số tự nhiên  $a$  chia cho 5 dư 4. Chứng minh rằng  $a^2$  chia cho 5 dư 1.

16. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a)  $x^2 - y^2$  tại  $x = 87$  và  $y = 13$  ;  
b)  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$  tại  $x = 101$  ;  
c)  $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$  tại  $x = 97$ .

17. Chứng minh rằng :

a)  $(a + b)(a^2 - ab + b^2) + (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 2a^3$  ;  
b)  $a^3 + b^3 = (a + b)[(a - b)^2 + ab]$  ;  
c)  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ .

18. Chứng tỏ rằng :

a)  $x^2 - 6x + 10 > 0$  với mọi  $x$  ;      b)  $4x - x^2 - 5 < 0$  với mọi  $x$ .

19. Tìm giá trị nhỏ nhất của các đa thức :

a)  $P = x^2 - 2x + 5$  ;      b)  $Q = 2x^2 - 6x$  ;  
c)  $M = x^2 + y^2 - x + 6y + 10$ .

20. Tìm giá trị lớn nhất của các đa thức :

a)  $A = 4x - x^2 + 3$  ;      b)  $B = x - x^2$  ;      c)  $N = 2x - 2x^2 - 5$ .



## Bài tập bổ sung

- 6.1.** Phân tích đa thức  $x^2(x + 1) - x(x + 1)$  thành nhân tử ta được kết quả là :  
(A)  $x$  ; (B)  $x(x + 1)$  ; (C)  $x(x + 1)x$  ; (D)  $x(x - 1)(x + 1)$ .  
Hãy chọn kết quả đúng.
- 6.2.** Tính nhanh giá trị các biểu thức  
a)  $97.13 + 130.0,3$ .  
b)  $86.153 - 530.8,6$ .

## §7. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức

- 26.** Phân tích thành nhân tử :  
a)  $x^2 - 9$  ; b)  $4x^2 - 25$  ; c)  $x^6 - y^6$ .
- 27.** Phân tích thành nhân tử :  
a)  $9x^2 + 6xy + y^2$  ; b)  $6x - 9 - x^2$  ; c)  $x^2 + 4y^2 + 4xy$ .
- 28.** Phân tích thành nhân tử :  
a)  $(x + y)^2 - (x - y)^2$  ; b)  $(3x + 1)^2 - (x + 1)^2$  ;  
c)  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ .
- 29.** Tính nhanh :  
a)  $25^2 - 15^2$  ; b)  $87^2 + 73^2 - 27^2 - 13^2$ .
- 30.** Tìm  $x$ , biết :  
a)  $x^3 - 0,25x = 0$  ; b)  $x^2 - 10x = -25$ .

## Bài tập bổ sung

- 7.1.** Phân tích đa thức  $4x^2 - 9y^2$  thành nhân tử ta có kết quả :  
(A)  $(2x - 3y)^2$  ; (B)  $(2x - 4,5y)(2x + 4,5y)$  ;  
(C)  $(4x - 9y)(4x + 9y)$  ; (D)  $(2x - 3y)(2x + 3y)$ .  
Hãy chọn kết quả đúng.
- 7.2.** Tìm  $x$ , biết :  
a)  $4x^2 - 4x = -1$ .  
b)  $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 0$ .

**§8. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhóm hạng tử**

31. Phân tích thành nhân tử :

a)  $x^2 - x - y^2 - y$  ;

b)  $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$ .

32. Phân tích thành nhân tử :

a)  $5x - 5y + ax - ay$  ;

b)  $a^3 - a^2x - ay + xy$  ;

c)  $xy(x + y) + yz(y + z) + xz(x + z) + 2xyz$ .

33. Tính nhanh giá trị của mỗi đa thức :

a)  $x^2 - 2xy - 4z^2 + y^2$  tại  $x = 6$  ;  $y = -4$  và  $z = 45$  ;

b)  $3(x - 3)(x + 7) + (x - 4)^2 + 48$  tại  $x = 0,5$ .

**Bài tập bổ sung**

Phân tích thành nhân tử

8.1. a)  $4x^2 - y^2 + 4x + 1$ .

b)  $x^3 - x + y^3 - y$ .

**§9. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách phối hợp nhiều phương pháp**

34. Phân tích thành nhân tử :

a)  $x^4 + 2x^3 + x^2$  ;

b)  $x^3 - x + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - y$  ;

c)  $5x^2 - 10xy + 5y^2 - 20z^2$ .

35. Phân tích thành nhân tử :

a)  $x^2 + 5x - 6$  ;

b)  $5x^2 + 5xy - x - y$  ;

c)  $7x - 6x^2 - 2$ .

36. Phân tích thành nhân tử :

a)  $x^2 + 4x + 3$  ;

b)  $2x^2 + 3x - 5$  ;

c)  $16x - 5x^2 - 3$ .

37. Tìm x, biết :

a)  $5x(x - 1) = x - 1$  ;

b)  $2(x + 5) - x^2 - 5x = 0$ .

38. Cho  $a + b + c = 0$ . Chứng minh  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ .



## Bài tập bổ sung

9.1. Phân tích đa thức  $x^4 + 8x$  thành nhân tử ta được kết quả là :

- (A)  $x(x + 2)(x^2 + 4x + 4)$  ;                      (B)  $x(x + 2)(x^2 + 2x + 4)$  ;  
(C)  $x(x + 2)(x^2 - 4x + 4)$  ;                      (D)  $x(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ .

Hãy chọn kết quả đúng.

9.2. Phân tích đa thức  $x^2 + x - 6$  thành nhân tử ta được kết quả là :

- (A)  $(x + 2)(x - 3)$  ;                                      (B)  $(x + 3)(x - 2)$  ;  
(C)  $(x - 2)(x - 3)$  ;                                      (D)  $(x + 2)(x + 3)$ .

Hãy chọn kết quả đúng.

9.3. Tìm  $x$ , biết :

- a)  $x^2 - 2x - 3 = 0$ .  
b)  $2x^2 + 5x - 3 = 0$ .

## §10. Chia đơn thức cho đơn thức

39. Làm tính chia :

- a)  $x^2yz : xyz$  ;    b)  $x^3y^4 : x^3y$ .

40. Làm tính chia :

- a)  $(x + y)^2 : (x + y)$  ;                                      b)  $(x - y)^5 : (y - x)^4$  ;  
c)  $(x - y + z)^4 : (x - y + z)^3$ .

41. Làm tính chia :

- a)  $18x^2y^2z : 6xyz$  ;                      b)  $5a^3b : (-2a^2b)$  ;                      c)  $27x^4y^2z : 9x^4y$ .

42. Tìm số tự nhiên  $n$  để mỗi phép chia sau là phép chia hết :

- a)  $x^4 : x^n$  ;    b)  $x^n : x^3$  ;  
c)  $5x^n y^3 : 4x^2 y^2$  ;                                      d)  $x^n y^{n+1} : x^2 y^5$ .

43. Tính giá trị của biểu thức sau :

$$(-x^2y^5)^2 : (-x^2y^5) \text{ tại } x = \frac{1}{2} \text{ và } y = -1.$$

## Bài tập bổ sung

10.1. Làm tính chia :

$$\text{a) } \left(\frac{5}{7}x^2y\right)^3 : \left(\frac{1}{7}xy\right)^3 \qquad \text{b) } (-x^3y^2z)^4 : (-xy^2z)^3.$$

10.2. Tính giá trị biểu thức  $-(x^7y^5z)^2 : (-xy^3z)^2$  tại  $x = 1$  ;  $y = -10$  ;  $z = 101$ .

## §11. Chia đa thức cho đơn thức

44. Thực hiện phép tính :

$$\text{a) } (7 \cdot 3^5 - 3^4 + 3^6) : 3^4 ; \qquad \text{b) } (16^3 - 64^2) : 8^3.$$

45. Làm tính chia :

$$\text{a) } (5x^4 - 3x^3 + x^2) : 3x^2 ; \qquad \text{b) } (5xy^2 + 9xy - x^2y^2) : (-xy) ;$$

$$\text{c) } \left(x^3y^3 - \frac{1}{2}x^2y^3 - x^3y^2\right) : \frac{1}{3}x^2y^2.$$

46. Tìm  $n$  để mỗi phép chia sau là phép chia hết ( $n$  là số tự nhiên) :

$$\text{a) } (5x^3 - 7x^2 + x) : 3x^n ;$$
$$\text{b) } (13x^4y^3 - 5x^3y^3 + 6x^2y^2) : 5x^n y^n.$$

47. Làm tính chia :

$$\text{a) } [5(a - b)^3 + 2(a - b)^2] : (b - a)^2 ; \qquad \text{b) } 5(x - 2y)^3 : (5x - 10y) ;$$
$$\text{c) } (x^3 + 8y^3) : (x + 2y).$$

## Bài tập bổ sung

11.1. Kết quả của phép tính  $(6x^9 - 2x^6 + 8x^3) : 2x^3$  là :

$$\text{(A) } 3x^3 - x^2 + 4x ; \qquad \text{(B) } 3x^3 - x^2 + 4 ;$$
$$\text{(C) } 3x^6 - x^3 + 4 ; \qquad \text{(D) } 3x^6 - x^3 + 4x.$$

Hãy chọn kết quả đúng.

11.2. Tìm  $n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) để mỗi phép chia sau đây là phép chia hết

$$\text{a) } (x^5 - 2x^3 - x) : 7x^n.$$
$$\text{b) } (5x^5y^5 - 2x^3y^3 - x^2y^2) : 2x^n y^n.$$

## §12. Chia đa thức một biến đã sắp xếp

48. Làm tính chia :

a)  $(6x^2 + 13x - 5) : (2x + 5)$  ;                      b)  $(x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x - 3)$  ;

c)  $(2x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x - 3) : (x^2 - 3)$ .

49. Sắp xếp các đa thức sau theo lũy thừa giảm của biến rồi thực hiện phép chia :

a)  $(12x^2 - 14x + 3 - 6x^3 + x^4) : (1 - 4x + x^2)$  ;

b)  $(x^5 - x^2 - 3x^4 + 3x + 5x^3 - 5) : (5 + x^2 - 3x)$  ;

c)  $(2x^2 - 5x^3 + 2x + 2x^4 - 1) : (x^2 - x - 1)$ .

50. Cho hai đa thức

$$A = x^4 - 2x^3 + x^2 + 13x - 11 \text{ và } B = x^2 - 2x + 3.$$

Tìm thương Q và dư R sao cho  $A = B.Q + R$ .

51. Tìm a sao cho đa thức  $x^4 - x^3 + 6x^2 - x + a$  chia hết cho đa thức  $x^2 - x + 5$ .

52. Tìm giá trị nguyên của n để giá trị của biểu thức  $3n^3 + 10n^2 - 5$  chia hết cho giá trị của biểu thức  $3n + 1$ .

### Bài tập bổ sung

12.1. Kết quả của phép tính  $(8x^3 - 1) : (1 - 2x)$  là :

(A)  $4x^2 - 2x - 1$  ;                      (B)  $-4x^2 - 2x - 1$  ;

(C)  $4x^2 + 2x + 1$  ;                      (D)  $4x^2 - 2x + 1$ .

Hãy chọn kết quả đúng.

12.2. Kết quả phép tính  $(x^3 + 8) : (x + 2)$  là :

(A)  $x^2 + 4$  ;                              (B)  $(x + 2)^2$  ;

(C)  $x^2 + 2x + 4$  ;                      (D)  $x^2 - 2x + 4$ .

Hãy chọn kết quả đúng.

12.3. Cho hai đa thức  $A = 2x^4 - 10x^3 + 3x^2 - 3x + 2$  ;  $B = 2x^2 + 1$ . Tìm đa thức dư R trong phép chia A cho B rồi viết  $A = B.Q + R$ .

### Bài tập ôn chương I

53. Làm tính nhân :

a)  $3x(x^2 - 7x + 9)$  ;

b)  $\frac{2}{5}xy(x^2y - 5x + 10y)$ .







19. a)  $(x - 1)^2 + 4 \geq 4$ ; Vậy giá trị nhỏ nhất (GTNN) là 4 tại  $x = 1$ .
- b)  $2(x^2 - 3x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} \geq -\frac{9}{2}$ ; GTNN là  $-\frac{9}{2}$  tại  $x = \frac{3}{2}$ .
- c)  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 3)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ ; GTNN là  $\frac{3}{4}$  tại  $x = \frac{1}{2}$  và  $y = -3$ .
20. a)  $-(x^2 - 4x + 4) + 7 = -(x - 2)^2 + 7 \leq 7$ ; Vậy giá trị lớn nhất (GTLN) là 7 tại  $x = 2$ .
- b)  $-(x^2 - x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$ ; GTLN là  $\frac{1}{4}$  tại  $x = \frac{1}{2}$ ;
- c)  $-2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} \leq -\frac{9}{2}$ ; GTLN là  $-\frac{9}{2}$  tại  $x = \frac{1}{2}$ .

### Bài tập bổ sung

3.1. Chọn (B).

3.2. Chọn (D).

3.3. a)  $P = -25x^2 + 15x + 23$ .

b)  $Q = x^3 + y^3$ .

3.4.  $P = \frac{1}{2}(5^{32} - 1)$ .

3.5. Có thể biến đổi về trái thành về phải hoặc ngược lại.

### §6. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung

21. a) 1 270 ;

b)  $52 \cdot (143 - 39 - 4) = 5\,200$ .

22. a)  $5(x - 4y)$  ;

b)  $(x - 1) \cdot 2x$  ;

c)  $(x + y)(x - 5)$ .

23. a) Biến đổi thành  $x(x + y + 1)$ . Giá trị cần tìm là 7700.

b) Biến đổi thành  $(x - y)^2$ . Giá trị cần tìm là 2500.



24. a) Biến đổi thành  $x(1 + 5x) = 0$ . Vậy  $x = 0$ ;  $x = -\frac{1}{5}$ ;  
 b)  $x = -1$ ;  $x = 0$ ; c)  $x = 0$ .
25. Phân tích thành nhân tử, ta thấy  $n(n + 1)(n + 2)$  là tích ba số nguyên liên tiếp nên luôn chia hết cho 6 với mọi số nguyên  $n$ .

### Bài tập bổ sung

6.1. Chọn (D).

6.2. a) 1300.

b) 8600.

### §7. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức

26. a)  $(x - 3)(x + 3)$ ; b)  $(2x - 5)(2x + 5)$ ;  
 c)  $(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ .
27. a)  $(3x + y)^2$ ; b)  $-(x - 3)^2$ ; c)  $(x + 2y)^2$ .
28. a)  $4xy$ ; b)  $4x(2x + 1)$ ;  
 c) Có nhiều cách giải. Có thể sử dụng bài 31 (SGK). Ta có

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y),$$

do đó

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= [(x + y)^3 + z^3] + [-3xy(x + y) - 3xyz] = \\ &= (x + y + z)[(x + y)^2 - z(x + y) + z^2] - 3xy(x + y + z) \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz). \end{aligned}$$

29. a) 400; b)  $(87^2 - 13^2) + (73^2 - 27^2) = 7400 + 4600 = 12\,000$ .
30. a)  $x\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = 0$ , tìm được ba giá trị là  $x = 0$ ;  $x = -\frac{1}{2}$ ;  $x = \frac{1}{2}$ .  
 b)  $x = 5$ .

## Bài tập bổ sung

7.1. Chọn (D).

7.2. a)  $(2x - 1)^2 = 0$  ;  $x = \frac{1}{2}$ .

b)  $(2x + 1)^3 = 0$  ;  $x = -\frac{1}{2}$ .

## §8. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhóm hạng tử

31. a)  $(x + y)(x - y - 1)$  ; b)  $(x - y - z)(x - y + z)$ .

32. a)  $(x - y)(5 + a)$  ; b)  $(a^2 - y)(a - x)$  ;

c) Có nhiều cách giải, có thể thực hiện phép tính rồi nhóm lại thích hợp. Chẳng hạn, biểu thức được biến đổi thành :

$$\begin{aligned} & [xy(x + y) + xyz] + [yz(y + z) + xyz] + xz(x + z) = \\ & = xy(x + y + z) + yz(x + y + z) + xz(x + z) \\ & = y(x + y + z)(x + z) + xz(x + z) \\ & = (x + z)(xy + y^2 + yz + xz) \\ & = (x + z)(x + y)(y + z). \end{aligned}$$

33. a) Biến đổi thành  $(x - y - 2z)(x - y + 2z)$ . Giá trị cần tìm là  $-8\,000$ .

b)  $(2x + 1)^2$ . Giá trị cần tìm là 4.

## Bài tập bổ sung

Phân tích thành nhân tử

8.1. a)  $(2x + 1 - y)(2x + 1 + y)$ .

b)  $(x + y)(x^2 - xy + y^2 - 1)$ .

## §9. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách phối hợp nhiều phương pháp

34. a)  $x^2(x + 1)^2$  ; b)  $(x + y)(x + y - 1)(x + y + 1)$  ;

c)  $5(x - y)^2 - 20z^2 = 5(x - y - 2z)(x - y + 2z)$ .





## Bài tập bổ sung

12.1. Chọn (B).

12.2. Chọn (D).

12.3.  $A = (2x^2 + 1)(x^2 - 5x + 1) + 2x + 1$ .

## Bài tập ôn chương I

53. a)  $3x^3 - 21x^2 + 27x$ ;

b)  $\frac{2}{5}x^3y^2 - 2x^2y + 4xy^2$ .

54. a)  $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$ ;

b)  $x^3 + x^2y + xy - 6xy^2 + 3y^2$ ;

c)  $-6x^3 + 17x^2 + 5x - 6$ .

55. a)  $(1,6 + 3,4)^2 = 25$ ;

b) 1;

c) Thay  $12 = x + 1$  hoặc phân tích đa thức thành nhân tử chứa các nhân tử  $x - 11$ , ta được 100.

56. a) 4;

b) *HD*. Thay  $3 = 2^2 - 1$  rồi áp dụng liên tiếp hằng đẳng thức

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2,$$

ta được kết quả là  $2^{32} - 1$ .

57. a)  $(x - 2)(x + 2)(x - 3)$ ;

b)  $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$ ;

c) Sử dụng  $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$  thay

$$(x + y + z)^3 = (x + y)^3 + z^3 + 3(x + y + z)(x + y)z,$$

ta được

$$\begin{aligned}(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 &= (x + y)^3 - x^3 - y^3 + 3(x + y + z)(x + y)z \\ &= 3xy(x + y) + 3(x + y + z)(x + y)z \\ &= 3(x + y)(xy + xz + yz + z^2) \\ &= 3(x + y)(x + z)(y + z).\end{aligned}$$

58. a)  $x + 3$ ;

b)  $x^2 + 3$ ;

c)  $x^3 + 2x^2 + 4x + 7$ .

59. a)  $A = (x - 3)^2 + 2 \geq 2$ . Vậy GTNN là 2 tại  $x = 3$  ;  
 b)  $B = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{27}{2} \geq -\frac{27}{2}$ . Vậy GTNN là  $-\frac{27}{2}$  tại  $x = -\frac{5}{2}$  ;  
 c)  $C = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \leq \frac{25}{4}$ . Vậy GTLN là  $\frac{25}{4}$  tại  $x = \frac{5}{2}$ .

### Bài tập bổ sung

- I.1. Chọn (C).  
 I.2. Chọn (B).  
 I.3. a)  $(x - 3)(x + 3)(x - 5)$ .  
 b)  $(x + 1)(x - 3)(x^2 + 1)$ .  
 I.4. a)  $2x^3 - 3x + 1$ .  
 b)  $5x^3 - 2x^2 + 6x + 1$ .  
 I.5. Viết được  $A = 2(x - 2)^2 - 18 \geq -18$ , do đó giá trị nhỏ nhất của A là  $-18$  tại  $x = 2$ .

Viết được  $B = -3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} \leq \frac{27}{4}$ , do đó giá trị lớn nhất của B là  $\frac{27}{4}$  tại  $x = \frac{3}{2}$ .

## Chương II PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

### ĐỀ BÀI

#### §1. Phân thức đại số

1. Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau chứng minh các đẳng thức sau :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{x^2y^3}{5} = \frac{7x^3y^4}{35xy} ; & \text{b) } \frac{x^2(x+2)}{x(x+2)^2} = \frac{x}{x+2} ; \\ \text{c) } \frac{3-x}{3+x} = \frac{x^2-6x+9}{9-x^2} ; & \text{d) } \frac{x^3-4x}{10-5x} = \frac{-x^2-2x}{5} . \end{array}$$

2. Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau, hãy tìm đa thức A trong mỗi đẳng thức sau :

$$\text{a) } \frac{A}{2x-1} = \frac{6x^2+3x}{4x^2-1} ;$$

$$\text{b) } \frac{4x^2-3x-7}{A} = \frac{4x-7}{2x+3} ;$$

$$\text{c) } \frac{4x^2-7x+3}{x^2-1} = \frac{A}{x^2+2x+1} ;$$

$$\text{d) } \frac{x^2-2x}{2x^2-3x-2} = \frac{x^2+2x}{A}.$$

3. Bạn Lan viết các đẳng thức sau và đố các bạn trong nhóm học tập tìm ra chỗ sai . Em hãy sửa chỗ sai cho đúng.

$$\text{a) } \frac{5x+3}{x-2} = \frac{5x^2+13x+6}{x^2-4} ;$$

$$\text{b) } \frac{x+1}{x+3} = \frac{x^2+3}{x^2+6x+9} ;$$

$$\text{c) } \frac{x^2-2}{x^2-1} = \frac{x+2}{x+1} ;$$

$$\text{d) } \frac{2x^2-5x+3}{x^2+3x-4} = \frac{2x^2-x-3}{x^2+5x+4}.$$

### Bài tập bổ sung

1.1. Tìm đa thức P để  $\frac{x-3}{x^2+x+1} = \frac{P}{x^3-1}$ . Phương án nào sau đây là đúng ?

$$\text{(A) } P = x^2 + 3 ;$$

$$\text{(B) } P = x^2 - 4x + 3 ;$$

$$\text{(C) } P = x + 3 ;$$

$$\text{(D) } P = x^2 - x - 3.$$

1.2. Trong mỗi trường hợp sau hãy tìm hai đa thức P và Q thoả mãn đẳng thức :

$$\text{a) } \frac{(x+2)P}{x-2} = \frac{(x-1)Q}{x^2-4} ;$$

$$\text{b) } \frac{(x+2)P}{x^2-1} = \frac{(x-2)Q}{x^2-2x+1}.$$

1.3\*. Cho hai phân thức  $\frac{P}{Q}$  và  $\frac{R}{S}$ . Chứng tỏ rằng :

$$\text{a) Nếu } \frac{P}{Q} = \frac{R}{S} \text{ thì } \frac{P+Q}{Q} = \frac{R+S}{S}.$$

$$\text{b) Nếu } \frac{P}{Q} = \frac{R}{S} \text{ và } P \neq Q \text{ thì } R \neq S \text{ và } \frac{P}{Q-P} = \frac{R}{S-R}.$$



## §2. Tính chất cơ bản của phân thức

4. Dùng tính chất cơ bản của phân thức, hãy điền một đa thức thích hợp vào các chỗ trống trong mỗi đẳng thức sau :

$$\text{a) } \frac{x-x^2}{5x^2-5} = \frac{x}{\dots};$$

$$\text{b) } \frac{x^2+8}{2x-1} = \frac{3x^3+24x}{\dots};$$

$$\text{c) } \frac{\dots}{x-y} = \frac{3x^2-3xy}{3(y-x)^2};$$

$$\text{d) } \frac{-x^2+2xy-y^2}{x+y} = \frac{\dots}{y^2-x^2}.$$

5. Biến đổi mỗi phân thức sau thành một phân thức bằng nó và có tử thức là đa thức A cho trước :

$$\text{a) } \frac{4x+3}{x^2-5}, A = 12x^2+9x;$$

$$\text{b) } \frac{8x^2-8x+2}{(4x-2)(15-x)}, A = 1-2x.$$

6. Dùng tính chất cơ bản của phân thức để biến đổi mỗi cặp phân thức sau thành một cặp phân thức bằng nó và có cùng tử thức :

$$\text{a) } \frac{3}{x+2} \text{ và } \frac{x-1}{5x};$$

$$\text{b) } \frac{x+5}{4x} \text{ và } \frac{x^2-25}{2x+3}.$$

7. Dùng tính chất cơ bản của phân thức hoặc quy tắc đổi dấu để biến mỗi cặp phân thức sau thành một cặp phân thức bằng nó và có cùng mẫu thức :

$$\text{a) } \frac{3x}{x-5} \text{ và } \frac{7x+2}{5-x};$$

$$\text{b) } \frac{4x}{x+1} \text{ và } \frac{3x}{x-1};$$

$$\text{c) } \frac{2}{x^2+8x+16} \text{ và } \frac{x-4}{2x+8};$$

$$\text{d) } \frac{2x}{(x+1)(x-3)} \text{ và } \frac{x+3}{(x+1)(x-2)}.$$

8. Cho hai phân thức  $\frac{A}{B}$  và  $\frac{C}{D}$ . Chứng minh rằng có vô số cặp phân thức cùng mẫu, có dạng  $\frac{A'}{E}$  và  $\frac{C'}{E}$  thoả mãn điều kiện  $\frac{A'}{E} = \frac{A}{B}$  và  $\frac{C'}{E} = \frac{C}{D}$ .

### Bài tập bổ sung

2.1. Hãy điền vào chỗ trống một đa thức thích hợp để được đẳng thức :

$$\text{a) } \frac{x+5}{3x-2} = \frac{\dots}{x(3x-2)};$$

$$\text{b) } \frac{2x-1}{4} = \frac{(2x-1)\dots}{8x+4};$$

$$\text{c) } \frac{2x(\dots)}{x^2-4x+4} = \frac{2x}{x-2};$$

$$\text{d) } \frac{5x^2+10x}{(x-2)\dots} = \frac{5x}{x-2}.$$

2.2. Biến đổi mỗi phân thức sau thành phân thức có mẫu thức là  $x^2 - 9$ :

$$\frac{3x}{x+3}; \frac{x-1}{x-3}; x^2 + 9.$$

2.3. Dùng tính chất cơ bản của phân thức chứng tỏ rằng các cặp phân thức sau bằng nhau:

a)  $\frac{x^2 + 3x + 2}{3x + 6}$  và  $\frac{2x^2 + x - 1}{6x - 3}$ .

b)  $\frac{15x - 10}{3x^2 + 3x - (2x + 2)}$  và  $\frac{5x^2 - 5x + 5}{x^3 + 1}$ .

### §3. Rút gọn phân thức

9. Rút gọn các phân thức:

a)  $\frac{14xy^5(2x-3y)}{21x^2y(2x-3y)^2}$ ;

b)  $\frac{8xy(3x-1)^3}{12x^3(1-3x)}$ ;

c)  $\frac{20x^2 - 45}{(2x+3)^2}$ ;

d)  $\frac{5x^2 - 10xy}{2(2y-x)^3}$ ;

e)  $\frac{80x^3 - 125x}{3(x-3) - (x-3)(8-4x)}$ ;

f)  $\frac{9 - (x+5)^2}{x^2 + 4x + 4}$ ;

g)  $\frac{32x - 8x^2 + 2x^3}{x^3 + 64}$ ;

h)  $\frac{5x^3 + 5x}{x^4 - 1}$ ;

i)  $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4x + 4}$ .

10. Chứng minh các đẳng thức sau:

a)  $\frac{x^2y + 2xy^2 + y^3}{2x^2 + xy - y^2} = \frac{xy + y^2}{2x - y}$ ;

b)  $\frac{x^2 + 3xy + 2y^2}{x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3} = \frac{1}{x - y}$ .

11. Cho hai phân thức  $\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 - 2x^2 + 1}$ ,  $\frac{5x^3 + 10x^2 + 5x}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$ . Theo bài tập 8, có vô số cặp phân thức có cùng mẫu thức và bằng cặp phân thức đã cho. Hãy tìm cặp phân thức như thế với mẫu thức là đa thức có bậc thấp nhất.

12. Tìm x, biết :

a)  $a^2x + x = 2a^4 - 2$  với a là hằng số ;

b)  $a^2x + 3ax + 9 = a^2$  với a là hằng số,  $a \neq 0$  và  $a \neq -3$ .

### Bài tập bổ sung

3.1. Rút gọn phân thức :

a)  $\frac{x^4 - y^4}{y^3 - x^3}$  ;      b)  $\frac{(2x - 4)(x - 3)}{(x - 2)(3x^2 - 27)}$  ;      c)  $\frac{2x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$ .

3.2\*. Rút gọn phân thức

$$Q = \frac{x^{10} - x^8 - x^7 + x^6 + x^5 + x^4 - x^3 - x^2 + 1}{x^{30} + x^{24} + x^{18} + x^{12} + x^6 + 1}.$$

### §4. Quy đồng mẫu thức nhiều phân thức

13. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau :

a)  $\frac{25}{14x^2y}, \frac{14}{21xy^5}$  ;

b)  $\frac{11}{102x^4y}, \frac{3}{34xy^3}$  ;

c)  $\frac{3x+1}{12xy^4}, \frac{y-2}{9x^2y^3}$  ;

d)  $\frac{1}{6x^3y^2}, \frac{x+1}{9x^2y^4}, \frac{x-1}{4xy^3}$  ;

e)  $\frac{3+2x}{10x^4y}, \frac{5}{8x^2y^2}, \frac{2}{3xy^5}$  ;

f)  $\frac{4x-4}{2x(x+3)}, \frac{x-3}{3x(x+1)}$  ;

g)  $\frac{2x}{(x+2)^3}, \frac{x-2}{2x(x+2)^2}$  ;

h)  $\frac{5}{3x^3-12x}, \frac{3}{(2x+4)(x+3)}$ .

14. Quy đồng mẫu thức các phân thức :

a)  $\frac{7x-1}{2x^2+6x}, \frac{5-3x}{x^2-9}$  ;

b)  $\frac{x+1}{x-x^2}, \frac{x+2}{2-4x+2x^2}$  ;

c)  $\frac{4x^2-3x+5}{x^3-1}, \frac{2x}{x^2+x+1}, \frac{6}{x-1}$  ;

d)  $\frac{7}{5x}, \frac{4}{x-2y}, \frac{x-y}{8y^2-2x^2}$  ;

e)  $\frac{5x^2}{x^3+6x^2+12x+8}, \frac{4x}{x^2+4x+4}, \frac{3}{2x+4}$ .

15. Cho đa thức  $B = 2x^3 + 3x^2 - 29x + 30$  và hai phân thức

$$\frac{x}{2x^2 + 7x - 15}, \quad \frac{x+2}{x^2 + 3x - 10}.$$

- a) Chia đa thức B lần lượt cho các mẫu thức của hai phân thức đã cho.  
b) Quy đồng mẫu thức của hai phân thức đã cho.

16. Cho hai phân thức  $\frac{1}{x^2 - 4x - 5}$  và  $\frac{2}{x^2 - 2x - 3}$ .

Chứng tỏ rằng có thể chọn đa thức  $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$  làm mẫu thức chung để quy đồng mẫu thức hai phân thức đã cho. Hãy quy đồng mẫu thức.

### Bài tập bổ sung

4.1. Quy đồng mẫu thức ba phân thức

$$\frac{x}{x^2 - 2xy + y^2 - z^2}, \quad \frac{y}{y^2 - 2yz + z^2 - x^2}, \quad \frac{z}{z^2 - 2zx + x^2 - y^2}.$$

4.2\*. Cho hai phân thức  $\frac{1}{x^2 + ax - 2}$  và  $\frac{2}{x^2 + 5x + b}$ . Hãy xác định a và b biết

rằng khi quy đồng mẫu thức chúng trở thành những phân thức có mẫu thức chung là  $x^3 + 4x^2 + x - 6$ . Viết tường minh hai phân thức đã cho và hai phân thức thu được sau khi quy đồng với mẫu thức chung là  $x^3 + 4x^2 + x - 6$ .

### §5. Phép cộng các phân thức đại số

17. Cộng các phân thức cùng mẫu thức :

a)  $\frac{1-2x}{6x^3y} + \frac{3+2y}{6x^3y} + \frac{2x-4}{6x^3y}$  ;

b)  $\frac{x^2-2}{x(x-1)^2} + \frac{2-x}{x(x-1)^2}$  ;

c)  $\frac{3x+1}{x^2-3x+1} + \frac{x^2-6x}{x^2-3x+1}$  ;

d)  $\frac{x^2+38x+4}{2x^2+17x+1} + \frac{3x^2-4x-2}{2x^2+17x+1}$ .

18. Cộng các phân thức khác mẫu thức :

a)  $\frac{5}{6x^2y} + \frac{7}{12xy^2} + \frac{11}{18xy}$  ;

b)  $\frac{4x+2}{15x^3y} + \frac{5y-3}{9x^2y} + \frac{x+1}{5xy^3}$  ;

c)  $\frac{3}{2x} + \frac{3x-3}{2x-1} + \frac{2x^2+1}{4x^2-2x}$  ;

d)  $\frac{x^3+2x}{x^3+1} + \frac{2x}{x^2-x+1} + \frac{1}{x+1}$ .

19. Dùng quy tắc đổi dấu để tìm mẫu thức chung rồi thực hiện phép cộng :

a)  $\frac{4}{x+2} + \frac{2}{x-2} + \frac{5x-6}{4-x^2}$  ;

b)  $\frac{1-3x}{2x} + \frac{3x-2}{2x-1} + \frac{3x-2}{2x-4x^2}$  ;

c)  $\frac{1}{x^2+6x+9} + \frac{1}{6x-x^2-9} + \frac{x}{x^2-9}$  ;

d)  $\frac{x^2+2}{x^3-1} + \frac{2}{x^2+x+1} + \frac{1}{1-x}$  ;

e)  $\frac{x}{x-2y} + \frac{x}{x+2y} + \frac{4xy}{4y^2-x^2}$ .

20. Cộng các phân thức :

a)  $\frac{1}{(x-y)(y-z)} + \frac{1}{(y-z)(z-x)} + \frac{1}{(z-x)(x-y)}$  ;

b)  $\frac{4}{(y-x)(z-x)} + \frac{3}{(y-x)(y-z)} + \frac{3}{(y-z)(x-z)}$  ;

c)  $\frac{1}{x(x-y)(x-z)} + \frac{1}{y(y-z)(y-x)} + \frac{1}{z(z-x)(z-y)}$ .

21. Làm tính cộng các phân thức :

a)  $\frac{11x+13}{3x-3} + \frac{15x+17}{4-4x}$  ;

b)  $\frac{2x+1}{2x^2-x} + \frac{32x^2}{1-4x^2} + \frac{1-2x}{2x^2+x}$  ;

c)  $\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2-x} + \frac{2x}{1-x^3}$  ;

d)  $\frac{x^4}{1-x} + x^3 + x^2 + x + 1$ .

22. Cho hai biểu thức :

$$A = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} + \frac{x-5}{x(x+5)},$$

$$B = \frac{3}{x+5}.$$

Chứng tỏ rằng  $A = B$ .

23. Con tàu du lịch "Sông Hồng" đưa khách từ Hà Nội đến Việt Trì. Sau đó, nó nghỉ lại tại Việt Trì 2 giờ rồi quay về Hà Nội. Độ dài khúc sông từ Hà Nội

đến Việt Trì là 70km. Vận tốc của dòng nước là 5 km/h. Vận tốc thực của con tàu (tức là vận tốc trong nước yên lặng) là x km/h.

a) Hãy biểu diễn qua x :

- Thời gian ngược từ Hà Nội đến Việt Trì ;
- Thời gian xuôi từ Việt Trì về Hà Nội ;
- Thời gian kể từ lúc xuất phát đến khi về tới Hà Nội.

b) Tính thời gian kể từ lúc xuất phát đến khi con tàu về tới Hà Nội, biết rằng vận tốc lúc ngược dòng của con tàu là 20km/h.

### Bài tập bổ sung

5.1. Cộng hai phân thức  $\frac{x+3}{2x-1} + \frac{4-x}{1-2x}$ . Phương án nào sau đây là đúng ?

- (A)  $\frac{7}{2x-1}$  ;      (B)  $\frac{7}{1-2x}$  ;      (C) 1 ;      (D) -1.

5.2\*. Thực hiện phép cộng :

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}.$$

### §6. Phép trừ các phân thức đại số

24. Làm tính trừ phân thức :

- a)  $\frac{3x-2}{2xy} - \frac{7x-4}{2xy}$  ;      b)  $\frac{3x+5}{4x^3y} - \frac{5-15x}{4x^3y}$  ;
- c)  $\frac{4x+7}{2x+2} - \frac{3x+6}{2x+2}$  ;      d)  $\frac{9x+5}{2(x-1)(x+3)^2} - \frac{5x-7}{2(x-1)(x+3)^2}$  ;
- e)  $\frac{xy}{x^2-y^2} - \frac{x^2}{y^2-x^2}$  ;      f)  $\frac{5x+y^2}{x^2y} - \frac{5y-x^2}{xy^2}$  ;
- g)  $\frac{x}{5x+5} - \frac{x}{10x-10}$  ;      h)  $\frac{x+9}{x^2-9} - \frac{3}{x^2+3x}$ .

25. Theo định nghĩa của phép trừ, khi viết

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} - \frac{E}{F} \text{ có nghĩa là } \frac{A}{B} + \frac{-C}{D} + \frac{-E}{F}.$$

Áp dụng điều này để làm các phép tính sau :

a)  $\frac{1}{3x-2} - \frac{1}{3x+2} - \frac{3x-6}{4-9x^2}$  ;

b)  $\frac{18}{(x-3)(x^2-9)} - \frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{x}{x^2-9}$ .

26. Rút gọn biểu thức :

a)  $\frac{3x^2+5x+1}{x^3-1} - \frac{1-x}{x^2+x+1} - \frac{3}{x-1}$  ;      b)  $\frac{1}{x^2-x+1} + 1 - \frac{x^2+2}{x^3+1}$  ;

c)  $\frac{7}{x} - \frac{x}{x+6} + \frac{36}{x^2+6x}$ .

27. Nếu mua lẻ thì giá một bút bi là x đồng. Nhưng nếu mua từ 10 bút trở lên thì giá mỗi bút rẻ hơn 100 đồng. Cô Dung dùng 180 000 đồng để mua bút cho văn phòng. Hãy biểu diễn qua x :

- Tổng số bút mua được khi mua lẻ ;
- Số bút mua được nếu mua cùng một lúc, biết rằng giá tiền một bút không quá 1 200 đồng ;
- Số bút được lợi khi mua cùng một lúc so với khi mua lẻ.

28. a) Chứng minh :  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$ .

b) **Đố.** Đố em tính nhầm được tổng sau :

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{x+5}$$

### Bài tập bổ sung

6.1. Thực hiện phép trừ  $\frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1}$ . Cách thực hiện nào sau đây là sai ?

(A)  $\frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \left( \frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x-1} \right) - \frac{1}{x-1} = \dots$  ;

(B)  $\frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x-1} - \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} \right) = \dots$  ;



$$(C) \frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x-1} - \left( \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-1} \right) = \dots ;$$

$$(D) \frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x-1} + \frac{-x}{x-1} + \frac{-1}{x-1} = \dots .$$

**6.2.** Trong mỗi trường hợp sau hãy tìm phân thức Q thoả mãn điều kiện :

$$a) \frac{1}{x^2 + x + 1} - Q = \frac{1}{x - x^2} + \frac{x^2 + 2x}{x^3 - 1} ;$$

$$b) \frac{2x - 6}{x^3 - 3x^2 - x + 3} + Q = \frac{6}{x - 3} - \frac{2x^2}{1 - x^2} .$$

## §7. Phép nhân các phân thức đại số

**29.** Làm tính nhân phân thức :

$$a) \frac{30x^3}{11y^2} \cdot \frac{121y^5}{25x} ;$$

$$b) \frac{24y^5}{7x^2} \cdot \left( -\frac{21x}{12y^3} \right) ;$$

$$c) \left( -\frac{18y^3}{25x^4} \right) \cdot \left( -\frac{15x^2}{9y^3} \right) ;$$

$$d) \frac{4x+8}{(x-10)^3} \cdot \frac{2x-20}{(x+2)^2} ;$$

$$e) \frac{2x^2 - 20x + 50}{3x+3} \cdot \frac{x^2 - 1}{4(x-5)^3} .$$

**30.** Rút gọn biểu thức (chú ý dùng quy tắc đổi dấu để thấy nhân tử chung) :

$$a) \frac{x+3}{x^2-4} \cdot \frac{8-12x+6x^2-x^3}{9x+27} ;$$

$$b) \frac{6x-3}{5x^2+x} \cdot \frac{25x^2+10x+1}{1-8x^3} ;$$

$$c) \frac{3x^2-x}{x^2-1} \cdot \frac{1-x^4}{(1-3x)^3} .$$

**31.** Phân tích các tử thức và các mẫu thức (nếu cần thì dùng phương pháp thêm và bớt cùng một số hạng hoặc tách một số hạng thành hai số hạng) rồi rút gọn biểu thức :

$$a) \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6} ;$$

$$b) \frac{x+1}{x^2-2x-8} \cdot \frac{4-x}{x^2+x} ;$$

$$c) \frac{x+2}{4x+24} \cdot \frac{x^2-36}{x^2+x-2} .$$

32. Áp dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng để rút gọn biểu thức :

$$a) \frac{x^3}{x+1975} \cdot \frac{2x+1954}{x+1} + \frac{x^3}{x+1975} \cdot \frac{21-x}{x+1} ;$$

$$b) \frac{19x+8}{x-7} \cdot \frac{5x-9}{x+1945} - \frac{19x+8}{x-7} \cdot \frac{4x-2}{x+1945} .$$

33. Tính tích  $x.y$ , biết rằng  $x$  và  $y$  thoả mãn các đẳng thức sau ( $a, b$  là các hằng số) :

$$a) (4a^2 - 9)x = 4a + 4 \text{ với } a \neq \pm \frac{3}{2} \text{ và } (3a^3 + 3)y = 6a^2 + 9a \text{ với } a \neq -1 ;$$

$$b) (2a^3 - 2b^3)x - 3b = 3a \text{ với } a \neq b \text{ và } (6a + 6b)y = (a - b)^2 \text{ với } a \neq -b .$$

$$(\text{Chú ý rằng } a^2 + ab + b^2 = a^2 + 2a \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0 .$$

Do đó nếu  $a \neq 0$  hoặc  $b \neq 0$  thì  $a^2 + ab + b^2 > 0$ ).

34. Rút gọn biểu thức :

$$a) \frac{x^4 + 15x + 7}{2x^3 + 2} \cdot \frac{x}{14x^2 + 1} \cdot \frac{4x^3 + 4}{x^4 + 15x + 7} ;$$

$$b) \frac{x^7 + 3x^2 + 2}{x^3 - 1} \cdot \frac{3x}{x + 1} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{x^7 + 3x^2 + 2} .$$

35. **Đố.** Đố em điền được một phân thức vào chỗ trống trong đẳng thức sau :

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x+4} \cdot \frac{x+4}{x+5} \cdot \frac{x+5}{x+6} \cdot \frac{x+6}{x+7} \cdot \frac{x+7}{x+8} \cdot \frac{x+8}{x+9} \cdot \frac{x+9}{x+10} \cdots = 1 .$$

### Bài tập bổ sung

7.1. Thực hiện các phép tính sau bằng hai cách : dùng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng và không dùng tính chất này :

$$a) \frac{x^3 - 1}{x + 2} \cdot \left( \frac{1}{x - 1} - \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} \right) .$$

$$b) \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{2x + 10} \cdot \left( \frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x + 1} + \frac{1}{x + 2} \right) .$$

7.2. Thực hiện phép nhân :  $\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot \frac{1}{1+x^8} \cdot \frac{1}{1+x^{16}}$  .

### §8. Phép chia các phân thức đại số

36. Hãy làm các phép chia sau :

a)  $\frac{7x+2}{3xy^3} : \frac{14x+4}{x^2y}$  ;

b)  $\frac{8xy}{3x-1} : \frac{12xy^3}{5-15x}$  ;

c)  $\frac{27-x^3}{5x+5} : \frac{2x-6}{3x+3}$  ;

d)  $(4x^2-16) : \frac{3x+6}{7x-2}$  ;

e)  $\frac{3x^3+3}{x-1} : (x^2-x+1)$  .

37. Thực hiện phép tính (chú ý đến quy tắc đổi dấu) :

a)  $\frac{4(x+3)}{3x^2-x} : \frac{x^2+3x}{1-3x}$  ;

b)  $\frac{4x+6y}{x-1} : \frac{4x^2+12xy+9y^2}{1-x^3}$  .

38. Rút gọn biểu thức :

a)  $\frac{x^4-xy^3}{2xy+y^2} : \frac{x^3+x^2y+xy^2}{2x+y}$  ;

b)  $\frac{5x^2-10xy+5y^2}{2x^2-2xy+2y^2} : \frac{8x-8y}{10x^3+10y^3}$  .

39. Thực hiện phép chia phân thức :

a)  $\frac{x^2-5x+6}{x^2+7x+12} : \frac{x^2-4x+4}{x^2+3x}$  ;

b)  $\frac{x^2+2x-3}{x^2+3x-10} : \frac{x^2+7x+12}{x^2-9x+14}$  .

40. Tìm Q, biết :

a)  $\frac{x-y}{x^3+y^3} \cdot Q = \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$  ;

b)  $\frac{x+y}{x^3-y^3} \cdot Q = \frac{3x^2+3xy}{x^2+xy+y^2}$  .

41. Rút gọn các biểu thức (chú ý đến thứ tự thực hiện các phép tính) :

a)  $\frac{x+1}{x+2} : \frac{x+2}{x+3} : \frac{x+3}{x+1}$  ;

b)  $\frac{x+1}{x+2} : \left( \frac{x+2}{x+3} : \frac{x+3}{x+1} \right)$  ;

c)  $\frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x+3} : \frac{x+3}{x+1}$  ;

d)  $\frac{x+1}{x+2} \cdot \left( \frac{x+2}{x+3} : \frac{x+3}{x+1} \right)$  ;

e)  $\frac{x+1}{x+2} : \frac{x+2}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x+1}$  ;

f)  $\frac{x+1}{x+2} : \left( \frac{x+2}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x+1} \right)$  .

42. Hà Nội cách TP. Hồ Chí Minh  $x$  km. Quãng đường từ Hà Nội đến Huế ngắn hơn quãng đường từ Huế đến TP. Hồ Chí Minh là 411 km. Một con tàu xuất phát từ TP. Hồ Chí Minh đi Hà Nội. Sau đó 8 giờ con tàu thứ hai xuất phát từ Hà Nội đi TP. Hồ Chí Minh, chúng gặp nhau tại Huế rồi tiếp tục đi. Con tàu thứ hai phải đi 20 giờ nữa thì tới TP. Hồ Chí Minh.

Hãy biểu diễn qua  $x$  :

- Chiều dài các quãng đường Hà Nội – Huế, Huế – TP. Hồ Chí Minh ;
  - Vận tốc của con tàu thứ hai ;
  - Thời gian đi của con tàu thứ hai từ Hà Nội vào Huế ;
  - Thời gian đi của con tàu thứ nhất từ TP. Hồ Chí Minh ra Huế ;
  - Vận tốc của con tàu thứ nhất ;
  - Thời gian đi của con tàu thứ nhất từ Huế ra Hà Nội.
43. **Đố.** Đố em điền được một phân thức vào chỗ trống của đẳng thức sau :

$$\frac{x}{x+1} : \frac{x+2}{x+1} : \frac{x+3}{x+2} : \frac{x+4}{x+3} : \frac{x+5}{x+4} : \dots = 1.$$

### Bài tập bổ sung

- 8.1. Hãy thực hiện các phép tính sau :

$$a) \frac{x}{y} : \frac{y}{z} ; \quad b) \frac{y}{z} : \frac{x}{y} ; \quad c) \left( \frac{x}{y} : \frac{y}{z} \right) : \frac{z}{x} ; \quad d) \frac{x}{y} : \left( \frac{y}{z} : \frac{z}{x} \right).$$

So sánh kết quả của a) với kết quả của b) ; kết quả của c) với kết quả của d).

Phép chia có tính chất giao hoán và tính chất kết hợp hay không ?

- 8.2. Tìm phân thức P biết :

$$a) P : \frac{4x^2 - 16}{2x + 1} = \frac{4x^2 + 4x + 1}{x - 2} ;$$

$$b) \frac{2x^2 + 4x + 8}{x^3 - 3x^2 - x + 3} : P = \frac{x^3 - 8}{(x + 1)(x - 3)}.$$

**§9. Biến đổi các biểu thức hữu tỉ. Giá trị của phân thức**

44. Biến đổi các biểu thức sau thành phân thức :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{1}{2} + \frac{x}{1 - \frac{x}{x+2}} ; & \text{b) } \frac{x - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} ; \\ \text{c) } \frac{1 - \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} ; & \text{d) } \frac{\frac{x}{4} - 1 + \frac{3}{4x}}{\frac{x}{2} - \frac{6}{x} + \frac{1}{2}} . \end{array}$$

45. Thực hiện các phép tính sau :

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left( \frac{5x+y}{x^2-5xy} + \frac{5x-y}{x^2+5xy} \right) \cdot \frac{x^2-25y^2}{x^2+y^2} ; \\ \text{b) } \frac{4xy}{y^2-x^2} : \left( \frac{1}{x^2+2xy+y^2} - \frac{1}{x^2-y^2} \right) ; \\ \text{c) } \frac{1}{(2x-y)^2} + \frac{2}{4x^2-y^2} + \frac{1}{(2x+y)^2} \cdot \frac{4x^2+4xy+y^2}{16x} ; \\ \text{d) } \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x^2+4x+4} : \frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{2-x} . \end{array}$$

46. Tìm điều kiện của biến để giá trị của phân thức xác định :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{5x^2 - 4x + 2}{20} ; & \text{b) } \frac{8}{x + 2004} ; \\ \text{c) } \frac{4x}{3x - 7} ; & \text{d) } \frac{x^2}{x + z} . \end{array}$$

47. Phân tích mẫu thức của các phân thức sau thành nhân tử rồi tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức xác định :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{5}{2x - 3x^2} ; & \text{b) } \frac{2x}{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1} ; \\ \text{c) } \frac{-5x^2}{16 - 24x + 9x^2} ; & \text{d) } \frac{3}{x^2 - 4y^2} . \end{array}$$

48. Có bạn nói rằng các phân thức  $\frac{2x}{2x-2}$ ,  $\frac{1}{x^2-2x+1}$ ,  $\frac{5x^3}{(x-1)(x^2+1)}$  có cùng điều kiện của biến  $x$ . Điều đó đúng hay sai? Vì sao?
49. a) Tìm một phân thức (một biến) mà giá trị của nó được xác định với mọi giá trị của biến khác các số nguyên lẻ lớn hơn 5 và nhỏ hơn 10.  
b) Tìm một phân thức (một biến) mà giá trị của nó được xác định với mọi giá trị của biến khác  $\pm\sqrt{2}$ .
50. **Đố.** Đố em tìm được một cặp phân thức của biến  $x$  mà khi giá trị của phân thức này bằng 0 thì giá trị của phân thức kia không xác định và ngược lại khi giá trị của phân thức kia bằng 0 thì giá trị của phân thức này không xác định. Em có thể tìm được bao nhiêu cặp phân thức như thế?
51. Tính giá trị của các biểu thức:
- a)  $\frac{3x^2-x}{9x^2-6x+1}$  tại  $x = -8$ ;      b)  $\frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$  tại  $x = 1\,000\,001$ .
52. Tìm điều kiện của các biến trong mỗi phân thức sau đây. Chứng minh rằng khi giá trị của phân thức xác định thì giá trị đó không phụ thuộc vào các biến  $x$  và  $y$  (nghĩa là chứng tỏ rằng có thể biến đổi phân thức đã cho thành một biểu thức không chứa  $x$  và  $y$ ):
- a)  $\frac{x^2-y^2}{(x+y)(6x-6y)}$  ;  
b)  $\frac{2ax-2x-3y+3ay}{4ax+6x+9y+6ay}$ , ( $a$  là hằng số khác  $-\frac{3}{2}$ ).
53. **Đố.** Đố em tìm được giá trị của  $x$  để giá trị của phân thức  $\frac{4x^2-4x^3+x^4}{x^3-2x^2}$  bằng:
- a)  $-2$ ;      b)  $2$ ;      c)  $0$ .
54. Cho biểu thức  $\frac{x^2+2x}{2x+10} + \frac{x-5}{x} + \frac{50-5x}{2x(x+5)}$ .
- a) Tìm điều kiện của biến  $x$  để giá trị của biểu thức được xác định.  
b) Tìm giá trị của  $x$  để giá trị của biểu thức bằng 1.  
c) Tìm giá trị của  $x$  để giá trị của biểu thức bằng  $-\frac{1}{2}$ .  
d) Tìm giá trị của  $x$  để giá trị của biểu thức bằng  $-3$ .

55. Tìm x, biết :

$$\text{a) } \frac{2x+1}{x^2-2x+1} - \frac{2x+3}{x^2-1} = 0 ; \quad \text{b) } \frac{3}{x-3} - \frac{6x}{9-x^2} + \frac{x}{x+3} = 0.$$

56. Với giá trị nào của x thì giá trị của mỗi biểu thức sau bằng 0 :

$$\text{a) } \frac{x}{x^2-4} + \frac{3}{(x+2)^2} ? \quad \text{b) } \frac{1}{x^2+x+1} + x - 1 ?$$

57. Tìm giá trị nguyên của biến x để tại đó giá trị của mỗi biểu thức sau là một số nguyên :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{2}{x-3} ; & \text{b) } \frac{3}{x+2} ; \\ \text{c) } \frac{3x^3 - 4x^2 + x - 1}{x-4} ; & \text{d) } \frac{3x^2 - x + 1}{3x+2}. \end{array}$$

Hãy tham khảo cách giải câu d) được trình bày dưới đây để giải các câu còn lại :

Chia tử cho mẫu, ta tìm được thương  $Q = x - 1$  và dư  $R = 3$ . Do đó

$$3x^2 - x + 1 = (3x + 2)(x - 1) + 3.$$

$$\text{Vì thế } \frac{3x^2 - x + 1}{3x + 2} = \frac{(3x + 2)(x - 1) + 3}{3x + 2} = x - 1 + \frac{3}{3x + 2}.$$

Nếu tồn tại giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức là số nguyên thì hiển nhiên  $x - 1$  có giá trị nguyên và  $\frac{3}{3x+2}$  cũng có giá trị nguyên. Do đó  $3x + 2$  phải là ước của 3, mà tập hợp các ước của 3 là  $\{-3, -1, 1, 3\}$ .

Nếu  $3x + 2 = -3$  thì  $3x = -5$  hay  $x = -\frac{5}{3}$ , không phải là số nguyên.

Nếu  $3x + 2 = -1$  thì  $3x = -3$  hay  $x = -1$ .

Nếu  $3x + 2 = 1$  thì  $3x = -1$  hay  $x = -\frac{1}{3}$ , không phải là số nguyên.

Nếu  $3x + 2 = 3$  thì  $3x = 1$  hay  $x = \frac{1}{3}$ , không phải là số nguyên.

Hiển nhiên với  $x = -1$  thì giá trị của phân thức đã cho xác định vì khi đó  $3x + 2 = -1 \neq 0$ .

Vậy để biểu thức có giá trị nguyên thì x chỉ có thể có giá trị nguyên là  $-1$ . Ngược lại, với  $x = -1$  thì giá trị của biểu thức là  $-5$ .

ĐS :  $x = -1$ .

## Bài tập bổ sung

9.1. Biết rằng  $Q = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \frac{(x - 3)^2}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{x - 3}{x + 3}$ . Hãy tính giá trị của biểu thức Q. Câu trả lời nào sau đây là sai ?

(A) Giá trị của Q tại  $x = 4$  là  $\frac{4 - 3}{4 + 3} = \frac{1}{7}$  ;

(B) Giá trị của Q tại  $x = 1$  là  $\frac{1 - 3}{1 + 3} = -\frac{1}{2}$  ;

(C) Giá trị của Q tại  $x = 3$  là  $\frac{3 - 3}{3 + 3} = 0$  ;

(D) Giá trị của Q tại  $x = 3$  không xác định.

9.2. Với mỗi biểu thức sau, hãy tìm giá trị của x để giá trị tương ứng của biểu thức bằng 1 :

a)  $\frac{1 + x^2 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x}}$  ;

b)  $\frac{1 + x^2 - \frac{4}{x+1}}{2 - \frac{4}{x+1}}$ .

## Bài tập ôn chương II

58. Thực hiện các phép tính :

a)  $\frac{9}{x^3 - 9x} + \frac{1}{x + 3} : \frac{x - 3}{x^2 + 3x} - \frac{x}{3x + 9}$  ;

b)  $\frac{2}{x - 2} - \frac{2}{x + 2} : \frac{x^2 + 4x + 4}{8}$  ;

c)  $\frac{3x}{1 - 3x} + \frac{2x}{3x + 1} : \frac{6x^2 + 10x}{1 - 6x + 9x^2}$  ;

d)  $\left( \frac{x}{x^2 - 25} - \frac{x - 5}{x^2 + 5x} \right) : \frac{2x - 5}{x^2 + 5x} + \frac{x}{5 - x}$  ;

e)  $\left( \frac{x^2 + xy}{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3} + \frac{y}{x^2 + y^2} \right) : \left( \frac{1}{x - y} - \frac{2xy}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3} \right)$ .



59. Chứng minh đẳng thức :

$$a) \frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{x+1}{2x};$$

$$b) \frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} - \frac{x+1}{3x} - x - \frac{x-1}{x} = \frac{2x}{x-1};$$

$$c) \frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 + 2x + 1} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^3} = \frac{x}{x-1}.$$

60. Biến đổi các biểu thức hữu tỉ thành phân thức :

$$a) \frac{\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x}}{x+1} - \frac{x}{x-1};$$

$$b) \frac{\frac{5}{4} - \frac{5}{x+1}}{9 - x^2} \cdot \frac{1}{x^2 + 2x + 1}.$$

61. Một phân thức có giá trị bằng 0 khi giá trị của tử thức bằng 0 còn giá trị của mẫu thức khác 0. Ví dụ giá trị của phân thức  $\frac{x^2 - 25}{x+1} = 0$  khi  $x^2 - 25 = 0$  và  $x+1 \neq 0$  hay  $(x-5)(x+5) = 0$  và  $x \neq -1$ . Vậy giá trị của phân thức này bằng 0 khi  $x = \pm 5$ .

Tìm các giá trị của x để giá trị của mỗi phân thức sau bằng 0 :

$$a) \frac{98x^2 - 2}{x-2};$$

$$b) \frac{3x-2}{x^2 + 2x + 1}.$$

62. Đối với mỗi biểu thức sau, hãy tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức được xác định :

$$a) \frac{\frac{2x-3}{x-1}}{x+2};$$

$$b) \frac{\frac{2x^2+1}{x}}{x-1};$$

$$c) \frac{\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}}{x};$$

$$d) \frac{\frac{x^2-25}{x^2+10x+25}}{x-5}.$$

63. Tìm giá trị của x để giá trị của các biểu thức trong bài tập 62 bằng 0.

64. Tìm điều kiện của  $x$  để giá trị của biểu thức được xác định và chứng minh rằng với điều kiện đó biểu thức không phụ thuộc vào biến :

$$\text{a) } \frac{\frac{x-\frac{1}{x}}{x^2+2x+1} - \frac{2x+2}{x}}{x}; \quad \text{b) } \frac{\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1}}{\frac{2x+2}{x-1} - \frac{4x}{x^2-1}};$$

$$\text{c) } \frac{1}{x-1} - \frac{x^3-x}{x^2+1} \cdot \left( \frac{x}{x^2-2x+1} - \frac{1}{x^2-1} \right);$$

$$\text{d) } \left( \frac{x}{x^2-36} - \frac{x-6}{x^2+6x} \right) : \frac{2x-6}{x^2+6x} + \frac{x}{6-x}.$$

65. Chứng minh rằng :

a) Giá trị của biểu thức  $\left( \frac{x+1}{x} \right)^2 : \left[ \frac{x^2+1}{x^2} + \frac{2}{x+1} \left( \frac{1}{x} + 1 \right) \right]$  bằng 1 với mọi giá trị  $x \neq 0$  và  $x \neq -1$  ;

b) Giá trị của biểu thức  $\frac{x}{x-3} - \frac{x^2+3x}{2x+3} \cdot \left( \frac{x+3}{x^2-3x} - \frac{x}{x^2-9} \right)$  bằng 1 khi  $x \neq 0, x \neq -3, x \neq 3, x \neq -\frac{3}{2}$ .

66. Chú ý rằng nếu  $c > 0$  thì  $(a+b)^2 + c$  và  $(a-b)^2 + c$  đều dương với mọi  $a, b$ .

Áp dụng điều này chứng minh rằng :

- a) Với mọi giá trị của  $x$  khác  $\pm 1$ , biểu thức

$$\frac{x+2}{x-1} \cdot \left( \frac{x^3}{2x+2} + 1 \right) - \frac{8x+7}{2x^2-2}$$

luôn luôn có giá trị dương ;

- b) Với mọi giá trị của  $x$  khác 0 và khác -3, biểu thức :

$$\frac{1-x^2}{x} \cdot \left( \frac{x^2}{x+3} - 1 \right) + \frac{3x^2-14x+3}{x^2+3x}$$

luôn luôn có giá trị âm.

67. Chú ý rằng vì  $(x + a)^2 \geq 0$  với mọi giá trị của  $x$  và  $(x + a)^2 = 0$  khi  $x = -a$  nên  $(x + a)^2 + b \geq b$  với mọi giá trị của  $x$  và  $(x + a)^2 + b = b$  khi  $x = -a$ . Do đó giá trị nhỏ nhất của  $(x + a)^2 + b$  bằng  $b$  khi  $x = -a$ . Áp dụng điều này giải các bài tập sau :

a) Rút gọn rồi tìm giá trị của  $x$  để biểu thức

$$\frac{x^2}{x-2} \cdot \left( \frac{x^2+4}{x} - 4 \right) + 3$$

có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất ấy.

b) Rút gọn rồi tìm giá trị của  $x$  để biểu thức

$$\frac{(x+2)^2}{x} \cdot \left( 1 - \frac{x^2}{x+2} \right) - \frac{x^2+6x+4}{x}$$

có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất ấy.

### Bài tập bổ sung

II.1. (Đề thi học sinh giỏi toán cấp II, Miền Bắc năm 1963)

Rút gọn và tính giá trị của biểu thức sau tại  $x = -1,76$  và  $y = \frac{3}{25}$  :

$$P = \left[ \left( \frac{x-y}{2y-x} - \frac{x^2+y^2+y-2}{x^2-xy-2y^2} \right) : \frac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x} \right] : \frac{x+1}{2x^2+y+2}$$

II.2. (Đề thi học sinh giỏi, lớp 8 toàn quốc năm 1980). Thực hiện phép tính :

$$\frac{1}{(b-c)(a^2+ac-b^2-bc)} + \frac{1}{(c-a)(b^2+ab-c^2-ac)} + \frac{1}{(a-b)(c^2+bc-a^2-ab)}$$

## LỜI GIẢI - CHỈ DẪN - ĐÁP SỐ

### §1. Phân thức đại số

1. *HD* : Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau để kiểm tra. Chẳng hạn,

$$c) \frac{3-x}{3+x} = \frac{x^2-6x+9}{9-x^2}.$$

$$\text{Vì } (3-x)(9-x^2) = 27 - 9x - 3x^2 + x^3 \text{ và}$$

$$(3+x)(x^2-6x+9) = 3x^2 - 18x + 27 + x^3 - 6x^2 + 9x = 27 - 9x - 3x^2 + x^3.$$

2. a)  $A(4x^2 - 1) = (2x - 1)(6x^2 + 3x)$  hay  $A(4x^2 - 1) = 3x(2x + 1)(2x - 1)$ .  
Vậy  $A = 3x$ .

$$b) (4x^2 - 3x - 7)(2x + 3) = A(4x - 7)$$

$$\text{hay } (4x^2 - 7x + 4x - 7)(2x + 3) = A(4x - 7)$$

$$\text{hay } (4x - 7)(x + 1)(2x + 3) = A(4x - 7).$$

$$\text{Vậy } A = (x + 1)(2x + 3) = 2x^2 + 5x + 3.$$

(Cũng có thể làm phép nhân  $(4x^2 - 3x - 7)(2x + 3)$  rồi lấy tích chia cho  $4x - 7$ ).

$$c) (4x^2 - 7x + 3)(x^2 + 2x + 1) = A(x^2 - 1). \text{ Suy ra } A = 4x^2 + x - 3.$$

$$d) A(x^2 - 2x) = (x^2 + 2x)(2x^2 - 3x - 2) \text{ hay } Ax(x - 2) = x(x + 2)(x - 2)(2x + 1). \\ \text{Suy ra } A = 2x^2 + 5x + 2.$$

3. a) Kiểm tra đẳng thức  $(5x + 3)(x^2 - 4) = (5x^2 + 13x + 6)(x - 2)$ . Đẳng thức đã cho đúng.

b) Kiểm tra thấy rằng  $(x + 1)(x^2 + 6x + 9) \neq (x + 3)(x^2 + 3)$ . Đẳng thức đã cho sai.

c) Sai.

d) Đúng.

### Bài tập bổ sung

1.1. Chọn (B).

1.2. *ĐS* : a)  $P = x - 1$ ,  $Q = (x + 2)(x + 2) = x^2 + 4x + 4$ .

$$b) P = (x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2, Q = (x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2.$$

1.3. a) Vì  $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$  nên  $P.S = Q.R$ . Do đó

$$(P + Q).S = P.S + Q.S = Q.R + Q.S = Q(R + S). \text{ Vậy } \frac{P + Q}{Q} = \frac{R + S}{S}.$$

b) Lập luận tương tự.

## §2. Tính chất cơ bản của phân thức

4. *HD* : a) Tử thức của hai vế chúng tỏ tử của vế trái đã được chia cho  $1 - x$ . Do đó cũng phải chia mẫu của vế trái cho  $1 - x$ . Mà

$$5x^2 - 5 = 5(x - 1)(x + 1) = -5(1 - x)(x + 1).$$

Vậy phải điền đa thức  $-5(x + 1)$  vào chỗ trống, tức là :

$$\frac{x - x^2}{5x^2 - 5} = \frac{x}{-5(x + 1)}.$$

Cũng có thể lập luận như sau :

$$\frac{x - x^2}{5x^2 - 5} = \frac{x(1 - x)}{5(x^2 - 1)} = \frac{x(1 - x)}{5(x - 1)(x + 1)} = \frac{x(1 - x)}{-5(1 - x)(x + 1)} = \frac{x}{-5(x + 1)}.$$

b) Đã nhân tử thức của vế trái với  $3x$ . Lập luận tương tự như trên, ta có :

$$\frac{x^2 + 8}{2x - 1} = \frac{(x^2 + 8).3x}{(2x - 1).3x} = \frac{3x^3 + 24x}{6x^2 - 3x}.$$

c) Vì  $(y - x)^2 = (x - y)^2$  nên các mẫu thức ở hai vế chúng tỏ mẫu ở vế phải đã được chia cho  $3(x - y)$  để được mẫu ở vế trái. Do đó cũng phải chia tử ở vế phải cho  $3(x - y)$ , mà  $3x^2 - 3xy = 3x(x - y)$ . Vậy tử ở vế trái bằng  $x$ , tức là

$$\frac{x}{x - y} = \frac{3x^2 - 3xy}{3(y - x)^2}.$$

Cũng có thể biến đổi như sau :

$$\frac{3x^2 - 3xy}{3(y - x)^2} = \frac{3x(x - y)}{3(x - y)^2} = \frac{x}{x - y},$$

(ta đã chia cả tử và mẫu của vế phải của đẳng thức trong bài tập cho  $3(x - y)$ ).

d) Vì  $-x^2 + 2xy - y^2 = -(x - y)^2$  và  $y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$  nên:

$$\begin{aligned} \frac{-x^2 + 2xy - y^2}{x + y} &= \frac{-(x - y)^2}{x + y} = \frac{-(x - y)^2(y - x)}{(x + y)(y - x)} = \\ &= \frac{(x - y)^3}{(x + y)(y - x)} = \frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{y^2 - x^2}. \end{aligned}$$

5. a)  $A = 12x^2 + 9x = 3x(4x + 3)$ , mà  $\frac{4x + 3}{x^2 - 5} = \frac{(4x + 3) \cdot 3x}{(x^2 - 5) \cdot 3x} = \frac{12x^2 + 9x}{3x^3 - 15x}$ . Vậy

phân thức phải tìm là  $\frac{12x^2 + 9x}{3x^3 - 15x}$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{8x^2 - 8x + 2}{(4x - 2)(15 - x)} &= \frac{2(4x^2 - 4x + 1)}{2(2x - 1)(15 - x)} = \frac{2(2x - 1)^2}{2(2x - 1)(15 - x)} \\ &= \frac{2x - 1}{15 - x} = \frac{1 - 2x}{x - 15}. \end{aligned}$$

Vậy phân thức phải tìm là  $\frac{1 - 2x}{x - 15}$ .

6. a) ĐS:  $\frac{3x - 3}{x^2 + x - 2}$  và  $\frac{3x - 3}{15x}$ .

b) Vì  $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$  nên tử thức chung có thể chọn là  $x^2 - 25$ .

$$\frac{x + 5}{4x} = \frac{(x + 5)(x - 5)}{4x(x - 5)} = \frac{x^2 - 25}{4x^2 - 20x}.$$

ĐS:  $\frac{x^2 - 25}{4x^2 - 20x}$  và  $\frac{x^2 - 25}{2x + 3}$ .

7. a) ĐS:  $\frac{3x}{x - 5}$  và  $\frac{-7x - 2}{x - 5}$ ;      b) ĐS:  $\frac{4x^2 - 4x}{x^2 - 1}$  và  $\frac{3x^2 + 3x}{x^2 - 1}$ ;

c) Vì  $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$  và  $2x + 8 = 2(x + 4)$  nên mẫu thức chung là  $2(x + 4)^2$ .

Ta có  $\frac{2}{x^2+8x+16} = \frac{2}{(x+4)^2} = \frac{2 \cdot 2}{2(x+4)^2} = \frac{4}{2x^2+16x+32}$  ;

$$\frac{x-4}{2x+8} = \frac{x-4}{2(x+4)} = \frac{(x-4)(x+4)}{2(x+4)^2} = \frac{x^2-16}{2x^2+16x+32}$$

ĐS:  $\frac{4}{2x^2+16x+32}$  và  $\frac{x^2-16}{2x^2+16x+32}$  ;

d) ĐS:  $\frac{2x^2-4x}{(x+1)(x-2)(x-3)}$  và  $\frac{x^2-9}{(x+1)(x-2)(x-3)}$ .

8. Với hai phân thức  $\frac{A}{B}$  và  $\frac{C}{D}$ , ta có hai phân thức cùng mẫu thức  $\frac{A \cdot D}{B \cdot D}$ ,  $\frac{B \cdot C}{B \cdot D}$  và  $\frac{A \cdot D}{B \cdot D} = \frac{A}{B}$ ,  $\frac{B \cdot C}{B \cdot D} = \frac{C}{D}$ . Nhân cả tử và mẫu của hai phân thức này với cùng

một đa thức  $P \neq 0$  bất kì, ta được hai phân thức mới:  $\frac{A \cdot D \cdot P}{B \cdot D \cdot P}$  và  $\frac{B \cdot C \cdot P}{B \cdot D \cdot P}$ .

Đặt  $A' = A \cdot D \cdot P$ ,  $C' = B \cdot C \cdot P$ ,  $E = B \cdot D \cdot P$ , ta được:

$$\frac{A'}{E} = \frac{A \cdot D \cdot P}{B \cdot D \cdot P} = \frac{A}{B} \quad \text{và} \quad \frac{C'}{E} = \frac{B \cdot C \cdot P}{B \cdot D \cdot P} = \frac{C}{D}$$

Vì có vô số đa thức  $P \neq 0$  nên có vô số cặp phân thức  $\frac{A'}{E}$  và  $\frac{C'}{E}$  thoả mãn điều kiện đã cho.

### Bài tập bổ sung

2.1. ĐS: a)  $x^2+5x$ ;      b)  $2x+1$ ;      c)  $x-2$ ;      d)  $x+2$ .

2.2. ĐS:  $\frac{3x}{x+3} = \frac{3x(x-3)}{x^2-9}$ ;  $\frac{x-1}{x-3} = \frac{(x-1)(x+3)}{x^2-9}$  ;

$$x^2+9 = \frac{(x^2+9)(x^2-9)}{x^2-9}$$

2.3. a)  $\frac{x^2+3x+2}{3x+6} = \frac{x^2+x+2x+2}{3(x+2)} = \frac{x(x+1)+2(x+1)}{3(x+2)} = \frac{(x+1)(x+2)}{3(x+2)}$ .

Chia tử và mẫu cho  $x + 2$  ta được  $\frac{x+1}{3}$  ;

$$\begin{aligned}\frac{2x^2 + x - 1}{6x - 3} &= \frac{x^2 + x + x^2 - 1}{3(2x - 1)} = \frac{x(x+1) + (x+1)(x-1)}{3(2x-1)} \\ &= \frac{(x+1)(2x-1)}{3(2x-1)}.\end{aligned}$$

Chia tử và mẫu cho  $2x - 1$  ta được  $\frac{x+1}{3}$ .

$$\begin{aligned}\text{b) Ta có } \frac{15x - 10}{3x^2 + 3x - (2x + 2)} &= \frac{5(3x - 2)}{3x(x+1) - 2(x+1)} \\ &= \frac{5(3x - 2)}{(x+1)(3x - 2)} = \frac{5}{x+1} ;\end{aligned}$$

$$\frac{5x^2 - 5x + 5}{x^3 + 1} = \frac{5(x^2 - x + 1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{5}{x+1}.$$

### §3. Rút gọn phân thức

9. a)  $\frac{2y^4}{3x(2x-3y)}$  ;

$$\text{b) } \frac{8xy(3x-1)^3}{12x^3(1-3x)} = \frac{-8xy(1-3x)^3}{12x^3(1-3x)} = \frac{-2y(1-3x)^2}{3x^2} ;$$

$$\text{c) } \frac{20x^2 - 45}{(2x+3)^2} = \frac{5(4x^2 - 9)}{(2x+3)^2} = \frac{5(2x-3)(2x+3)}{(2x+3)^2} = \frac{5(2x-3)}{2x+3} ;$$

$$\text{d) } \frac{5x^2 - 10xy}{2(2y-x)^3} = \frac{5x(x-2y)}{2(2y-x)^3} = \frac{-5x(2y-x)}{2(2y-x)^3} = \frac{-5x}{2(2y-x)^2} ;$$

$$\begin{aligned}\text{e) } \frac{80x^3 - 125x}{3(x-3) - (x-3)(8-4x)} &= \frac{5x(16x^2 - 25)}{(x-3)(3-8+4x)} \\ &= \frac{5x(4x-5)(4x+5)}{(x-3)(4x-5)} = \frac{5x(4x+5)}{x-3} ;\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{f) } \frac{9-(x+5)^2}{x^2+4x+4} &= \frac{(3-x-5)(3+x+5)}{(x+2)^2} = \frac{(-x-2)(x+8)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{-(x+2)(x+8)}{(x+2)^2} = \frac{-x-8}{x+2} ; \end{aligned}$$

$$\text{g) } \frac{32x-8x^2+2x^3}{x^3+64} = \frac{2x(16-4x+x^2)}{(x+4)(x^2-4x+16)} = \frac{2x}{x+4} ;$$

$$\text{h) } \frac{5x^3+5x}{x^4-1} = \frac{5x(x^2+1)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{5x}{x^2-1} ;$$

$$\text{i) } \frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4} = \frac{x^2+2x+3x+6}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)^2} = \frac{x+3}{x+2} .$$

10. a) 
$$\begin{aligned} \frac{x^2y+2xy^2+y^3}{2x^2+xy-y^2} &= \frac{y(x^2+2xy+y^2)}{2x^2+2xy-xy-y^2} \\ &= \frac{y(x+y)^2}{2x(x+y)-y(x+y)} = \frac{y(x+y)}{2x-y} = \frac{xy+y^2}{2x-y} ; \end{aligned}$$

b) 
$$\begin{aligned} \frac{x^2+3xy+2y^2}{x^3+2x^2y-xy^2-2y^3} &= \frac{x^2+xy+2xy+2y^2}{x^3-xy^2+2x^2y-2y^3} \\ &= \frac{x(x+y)+2y(x+y)}{x(x^2-y^2)+2y(x^2-y^2)} = \frac{(x+y)(x+2y)}{(x^2-y^2)(x+2y)} \\ &= \frac{(x+y)(x+2y)}{(x-y)(x+y)(x+2y)} = \frac{1}{x-y} . \end{aligned}$$

11. Trước hết rút gọn mỗi phân thức :

$$\begin{aligned} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1} &= \frac{x^2(x-1)-(x-1)}{(x^2-1)^2} = \frac{(x-1)(x^2-1)}{(x^2-1)^2} = \\ &= \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1} . \end{aligned}$$

$$\frac{5x^3+10x^2+5x}{x^3+3x^2+3x+1} = \frac{5x(x^2+2x+1)}{(x+1)^3} = \frac{5x(x+1)^2}{(x+1)^3} = \frac{5x}{x+1} .$$

Hai phân thức  $\frac{1}{x+1}$  và  $\frac{5x}{x+1}$  là hai phân thức cần tìm. Thật vậy, nếu còn có hai phân thức khác thoả mãn điều kiện của bài toán với bậc của mẫu thức chung thấp hơn thì mẫu thức chung ấy phải có bậc 0 tức là một hằng số  $a \neq 0$  nào đó. Chẳng hạn,  $\frac{1}{x+1} = \frac{b}{a}$ . Theo định nghĩa hai phân thức bằng nhau ta có  $1 \cdot a = b(x+1) = bx + b$ . Vì  $a \neq 0$  nên  $b \neq 0$ . Do đó bậc của vế phải không nhỏ hơn 1 còn bậc của vế trái lại bằng 0. Đó là điều vô lí.

*Chú ý.* Cũng có thể lập luận như sau : Vì  $x+1 = a\left(\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}\right)$  nên đẳng thức chứng tỏ ta đã chia mẫu thức  $x+1$  cho  $\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$ . Vậy 1 cũng phải chia hết cho  $\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$ . Nhưng điều đó là không thể được.

12. a)  $a^2x + x = 2a^4 - 2$  hay  $(a^2 + 1)x = 2(a^4 - 1)$ . Vì  $a^2 + 1 \geq 1$  nên  $a^2 + 1 \neq 0$ . Do đó

$$x = \frac{2(a^4 - 1)}{a^2 + 1} = \frac{2(a^2 - 1)(a^2 + 1)}{a^2 + 1} = 2(a^2 - 1).$$

- b)  $a^2x + 3ax + 9 = a^2$  hay  $(a^2 + 3a)x = a^2 - 9$ . Vì  $a \neq 0$ ,  $a \neq -3$ , nên  $a^2 + 3a = a(a+3) \neq 0$ . Do đó

$$x = \frac{a^2 - 9}{a^2 + 3a} = \frac{(a-3)(a+3)}{a(a+3)} = \frac{a-3}{a}.$$

### Bài tập bổ sung

3.1. a)  $-\frac{(x+y)(x^2+y^2)}{x^2+xy+y^2}$  ; b)  $\frac{2}{3(x+3)}$  ;

c)  $\frac{2x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{x^2(2x+1) - (2x+1)}{x^2(x+2) - (x+2)} = \frac{(2x+1)(x^2-1)}{(x+2)(x^2-1)} = \frac{2x+1}{x+2}$ .

3.2. *Giải* :  $Q = \frac{(x^{10} - x^8 + x^6) - (x^7 - x^5 + x^3) + (x^4 - x^2 + 1)}{x^{18}(x^{12} + x^6 + 1) + x^{12} + x^6 + 1}$   
 $= \frac{(x^4 - x^2 + 1)(x^6 - x^3 + 1)}{(x^{12} + x^6 + 1)(x^{18} + 1)}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x^4 - x^2 + 1)(x^6 - x^3 + 1)}{(x^{12} + 2x^6 + 1 - x^6)(x^6 + 1)(x^{12} - x^6 + 1)} \\
&= \frac{(x^4 - x^2 + 1)(x^6 - x^3 + 1)}{[(x^6 + 1)^2 - x^6](x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^{12} - x^6 + 1)} \\
&= \frac{x^6 - x^3 + 1}{(x^6 + x^3 + 1)(x^6 - x^3 + 1)(x^2 + 1)(x^{12} - x^6 + 1)} \\
&= \frac{1}{(x^6 + x^3 + 1)(x^2 + 1)(x^{12} - x^6 + 1)}.
\end{aligned}$$

#### §4. Quy đồng mẫu thức nhiều phân thức

13. ĐS: a)  $\frac{75y^4}{42x^2y^5}, \frac{28x}{42x^2y^5}$  ;

b)  $\frac{11y^2}{102x^4y^3}, \frac{9x^3}{102x^4y^3}$  ;

c)  $\frac{9x^2 + 3x}{36x^2y^4}, \frac{4y^2 - 8y}{36x^2y^4}$  ;

d)  $\frac{6y^2}{36x^3y^4}, \frac{4x^2 + 4x}{36x^3y^4}, \frac{9x^3y - 9x^2y}{36x^3y^4}$  ;

e)  $\frac{36y^4 + 24xy^4}{120x^4y^5}, \frac{75x^2y^3}{120x^4y^5}, \frac{80x^3}{120x^4y^5}$  ;

f)  $\frac{4x - 4}{2x(x + 3)} = \frac{(4x - 4)3(x + 1)}{6x(x + 3)(x + 1)} = \frac{12(x - 1)(x + 1)}{6x(x + 3)(x + 1)} = \frac{12(x^2 - 1)}{6x(x + 3)(x + 1)}$ ,

$\frac{x - 3}{3x(x + 1)} = \frac{2(x + 3)(x - 3)}{6x(x + 3)(x + 1)} = \frac{2(x^2 - 9)}{6x(x + 3)(x + 1)}$  ;

g)  $\frac{2x}{(x + 2)^3} = \frac{4x^2}{2x(x + 2)^3}, \frac{x - 2}{2x(x + 2)^2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{2x(x + 2)^3} = \frac{x^2 - 4}{2x(x + 2)^3}$  ;

$$\begin{aligned}
 \text{h) } \frac{5}{3x^3 - 12x} &= \frac{5}{3x(x-2)(x+2)} = \frac{5 \cdot 2(x+3)}{6x(x-2)(x+2)(x+3)} \\
 &= \frac{10(x+3)}{6x(x-2)(x+2)(x+3)}, \\
 \frac{3}{(2x+4)(x+3)} &= \frac{3}{2(x+2)(x+3)} = \frac{3 \cdot 3x(x-2)}{6x(x-2)(x+2)(x+3)} \\
 &= \frac{9x(x-2)}{6x(x-2)(x+2)(x+3)}.
 \end{aligned}$$

14. a) Vì  $2x^2 + 6x = 2x(x+3)$  và  $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ . Vậy

$$\begin{aligned}
 \frac{7x-1}{2x^2+6x} &= \frac{7x-1}{2x(x+3)} = \frac{(7x-1)(x-3)}{2x(x+3)(x-3)}, \\
 \frac{5-3x}{x^2-9} &= \frac{5-3x}{(x+3)(x-3)} = \frac{2x(5-3x)}{2x(x+3)(x-3)};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{x+1}{x-x^2} &= \frac{x+1}{x(1-x)} = \frac{2(x+1)(1-x)}{2x(1-x)^2}, \\
 \frac{x+2}{2-4x+2x^2} &= \frac{x+2}{2(1-x)^2} = \frac{x(x+2)}{2x(1-x)^2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \frac{4x^2-3x+5}{x^3-1} &= \frac{4x^2-3x+5}{(x-1)(x^2+x+1)}, \quad \frac{2x}{x^2+x+1} = \frac{2x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}, \\
 \frac{6}{x-1} &= \frac{6(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \frac{7}{5x} &= \frac{7 \cdot 2(x-2y)(x+2y)}{5x \cdot 2(x-2y)(x+2y)} = \frac{14(x-2y)(x+2y)}{10x(x-2y)(x+2y)}, \\
 \frac{4}{x-2y} &= \frac{4 \cdot 10x(x+2y)}{10x(x-2y)(x+2y)} = \frac{40x(x+2y)}{10x(x-2y)(x+2y)}, \\
 \frac{x-y}{8y^2-2x^2} &= \frac{y-x}{2x^2-8y^2} = \frac{y-x}{2(x-2y)(x+2y)} = \\
 &= \frac{(y-x) \cdot 5x}{2(x-2y)(x+2y) \cdot 5x} = \frac{5x(y-x)}{10x(x-2y)(x+2y)};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \frac{5x^2}{x^3+6x^2+12x+8} &= \frac{5x^2}{(x+2)^3} = \frac{2.5x^2}{2(x+2)^3} = \frac{10x^2}{2(x+2)^3}, \\
 \frac{4x}{x^2+4x+4} &= \frac{4x}{(x+2)^2} = \frac{4x.2(x+2)}{2(x+2)^3} = \frac{8x(x+2)}{2(x+2)^3}, \\
 \frac{3}{2x+4} &= \frac{3}{2(x+2)} = \frac{3(x+2)^2}{2(x+2)^3}.
 \end{aligned}$$

15. a) Thực hiện các phép chia đã nói, ta được :

$$2x^3 + 3x^2 - 29x + 30 = (2x^2 + 7x - 15)(x - 2) = (x^2 + 3x - 10)(2x - 3);$$

b) Theo a) ta có :

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{2x^2+7x-15} &= \frac{x(x-2)}{(2x^2+7x-15)(x-2)} = \frac{x^2-2x}{2x^3+3x^2-29x+30}, \\
 \frac{x+2}{x^2+3x-10} &= \frac{(x+2)(2x-3)}{(x^2+3x-10)(2x-3)} = \frac{2x^2+x-6}{2x^3+3x^2-29x+30}.
 \end{aligned}$$

16. Chia  $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$  cho các mẫu thức của hai phân thức đã cho, ta được :

$$x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = (x^2 - 4x - 5)(x - 3) = (x^2 - 2x - 3)(x - 5). \text{ Do đó :}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x^2-4x-5} &= \frac{1.(x-3)}{(x^2-4x-5)(x-3)} = \frac{x-3}{x^3-7x^2+7x+15}, \\
 \frac{2}{x^2-2x-3} &= \frac{2(x-5)}{(x^2-2x-3)(x-5)} = \frac{2x-10}{x^3-7x^2+7x+15}.
 \end{aligned}$$

### Bài tập bổ sung

4.1.  $MTC = (x - y + z)(x - y - z)(x + y - z)$

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{x^2-2xy+y^2-z^2} &= \frac{x(x+y-z)}{(x-y+z)(x-y-z)(x+y-z)}, \\
 \frac{y}{y^2-2yz+z^2-x^2} &= \frac{y}{(y-z+x)(y-z-x)} = \frac{-y}{(x+y-z)(x-y+z)} \\
 &= \frac{-y(x-y-z)}{(x-y+z)(x-y-z)(x+y-z)},
 \end{aligned}$$

$$\frac{z}{z^2 - 2zx + x^2 - y^2} = \frac{z}{(z - x + y)(z - x - y)}$$

$$= \frac{z(x - y + z)}{(x - y - z)(x + y - z)(x - y + z)}$$

4.2. *Giải* : Chia  $x^3 + 4x^2 + x - 6$  cho  $x^2 + ax - 2$  ta được thương là  $x + 4 - a$ . Vì dư của phép chia phải bằng 0 nên ta suy ra  $2a - 8 = -6$  (1)

$$\text{và } a(4 - a) = 3. \quad (2)$$

Từ (1) suy ra  $a = 1$ . Giá trị này cũng thoả mãn (2).

Chia  $x^3 + 4x^2 + x - 6$  cho  $x^2 + 5x + b$  ta được thương là  $x - 1$ .

$$\text{Tương tự như trên ta suy ra } b = 6 \quad (3)$$

$$\text{và } 1 - b = -5. \quad (4)$$

Giá trị  $b = 6$  thoả mãn cả hai đẳng thức (3) và (4).

Vậy hai phân thức đã cho là  $\frac{1}{x^2 + x - 2}$  và  $\frac{2}{x^2 + 5x + 6}$ ,

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x^2 + x - 2)(x + 3) = (x^2 + 5x + 6)(x - 1).$$

Sau khi quy đồng mẫu thức ta được

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{x + 3}{x^3 + 4x^2 + x - 6} \quad \text{và} \quad \frac{2}{x^2 + 5x + 6} = \frac{2(x - 1)}{x^3 + 4x^2 + x - 6}.$$

## §5. Phép cộng các phân thức đại số

17. *ĐS* : a)  $\frac{1}{3x^3}$  ; b)  $\frac{1}{x-1}$  ; c) 1 ; d) 2.

$$18. \text{ a) } \frac{5}{6x^2y} + \frac{7}{12xy^2} + \frac{11}{18xy} = \frac{5.6y + 7.3x + 11.2xy}{36x^2y^2} = \frac{21x + 30y + 22xy}{36x^2y^2};$$

$$\text{ b) } \frac{4x+2}{15x^3y} + \frac{5y-3}{9x^2y} + \frac{x+1}{5xy^3} = \frac{(4x+2)3y^2 + (5y-3)5xy^2 + (x+1)9x^2}{45x^3y^3}$$

$$= \frac{12xy^2 + 6y^2 + 25xy^3 - 15xy^2 + 9x^3 + 9x^2}{45x^3y^3}$$

$$= \frac{9x^3 + 9x^2 - 3xy^2 + 6y^2 + 25xy^3}{45x^3y^3};$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \frac{3}{2x} + \frac{3x-3}{2x-1} + \frac{2x^2+1}{4x^2-2x} &= \frac{3(2x-1) + (3x-3)2x + 2x^2 + 1}{2x(2x-1)} \\
 &= \frac{6x-3+6x^2-6x+2x^2+1}{2x(2x-1)} = \frac{8x^2-2}{2x(2x-1)} = \\
 &= \frac{2(4x^2-1)}{2x(2x-1)} = \frac{2(2x-1)(2x+1)}{2x(2x-1)} = \frac{2x+1}{x};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \frac{x^3+2x}{x^3+1} + \frac{2x}{x^2-x+1} + \frac{1}{x+1} &= \frac{x^3+2x+2x(x+1)+x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \\
 &= \frac{x^3+3x^2+3x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{(x+1)^3}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{19. a) } \frac{4}{x+2} + \frac{2}{x-2} + \frac{5x-6}{4-x^2} &= \frac{4}{x+2} + \frac{2}{x-2} + \frac{6-5x}{x^2-4} = \\
 &= \frac{4(x-2) + 2(x+2) + 6-5x}{(x-2)(x+2)} = \frac{4x-8+2x+4+6-5x}{(x-2)(x+2)} = \\
 &= \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x-2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{1-3x}{2x} + \frac{3x-2}{2x-1} + \frac{3x-2}{2x-4x^2} &= \frac{(1-3x)(2x-1) + 2x(3x-2) + 2-3x}{2x(2x-1)} = \\
 &= \frac{2x-1-6x^2+3x+6x^2-4x+2-3x}{2x(2x-1)} = \frac{-2x+1}{2x(2x-1)} = -\frac{1}{2x};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \frac{1}{x^2+6x+9} + \frac{1}{6x-x^2-9} + \frac{x}{x^2-9} &= \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{-1}{(x-3)^2} + \frac{x}{(x+3)(x-3)} = \\
 &= \frac{(x-3)^2 - (x+3)^2 + x(x+3)(x-3)}{(x+3)^2(x-3)^2} = \\
 &= \frac{x^2-6x+9-x^2-6x-9+x^3-9x}{(x+3)^2(x-3)^2} = \frac{x^3-21x}{(x+3)^2(x-3)^2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{x^2+2}{x^3-1} + \frac{2}{x^2+x+1} + \frac{1}{1-x} &= \frac{x^2+2+2(x-1)-(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \\ &= \frac{x^2+2+2x-2-x^2-x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x^2+x+1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \frac{x}{x-2y} + \frac{x}{x+2y} + \frac{4xy}{4y^2-x^2} &= \frac{x(x+2y)+x(x-2y)-4xy}{(x-2y)(x+2y)} = \\ &= \frac{x^2+2xy+x^2-2xy-4xy}{(x-2y)(x+2y)} = \frac{2x^2-4xy}{(x-2y)(x+2y)} = \frac{2x(x-2y)}{(x-2y)(x+2y)} = \frac{2x}{x+2y}. \end{aligned}$$

$$20. \text{ a) } \frac{1}{(x-y)(y-z)} + \frac{1}{(y-z)(z-x)} + \frac{1}{(z-x)(x-y)} = \frac{z-x+x-y+y-z}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 0;$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{4}{(y-x)(z-x)} + \frac{3}{(x-y)(z-y)} + \frac{3}{(x-z)(y-z)} &= \\ &= \frac{-4(y-z)-3(z-x)-3(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{-y+z}{(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{1}{(x-y)(x-z)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{1}{x(x-y)(x-z)} + \frac{1}{y(y-x)(y-z)} + \frac{1}{z(z-x)(z-y)} &= \\ &= \frac{-yz(y-z)-zx(z-x)-xy(x-y)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)} \\ &= \frac{-y^2z+yz^2-z^2x+zx^2-x^2y+xy^2}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)} \\ &= \frac{-y^2(z-x)-zx(z-x)+y(z^2-x^2)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{(z-x)(yz+xy-y^2-zx)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)} \\ &= \frac{(z-x)[y(x-y)-z(x-y)]}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{1}{xyz}. \end{aligned}$$

*Chú ý.* Cũng có thể biến đổi như sau :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x-y)(x-z)} + \frac{1}{y(y-x)(y-z)} + \frac{1}{z(z-x)(z-y)} &= \\ &= \frac{-yz(y-z)-zx(z-x)-xy(x-y)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{yz(x-y+z-x) - zx(z-x) - xy(x-y)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)} \\
&= \frac{(x-y)(yz-xy) - (z-x)(zx-yz)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)} \\
&= \frac{y(x-y)(z-x) - z(x-y)(z-x)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{1}{xyz}.
\end{aligned}$$

21. a) ĐS:  $-\frac{1}{12}$  ;

b) 
$$\frac{2x+1}{2x^2-x} + \frac{32x^2}{1-4x^2} + \frac{1-2x}{2x^2+x} = \frac{(2x+1)^2 - 32x^3 - (2x-1)^2}{x(2x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{-32x^3 + 8x}{x(2x-1)(2x+1)} = \frac{-8x(4x^2-1)}{x(2x-1)(2x+1)} = -8 ;$$

c) 
$$\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2-x} + \frac{2x}{1-x^3} = \frac{x(x-1)+x^2+x+1-2x^2}{x(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{1}{x(x-1)(x^2+x+1)} ;$$

d) 
$$\frac{x^4}{1-x} + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^4 + 1 - x^4}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

22. Biến đổi biểu thức A :

$$A = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} + \frac{x-5}{x(x+5)} = \frac{x+5+x+x-5}{x(x+5)} = \frac{3x}{x(x+5)} = \frac{3}{x+5} = B.$$

23. a) Vận tốc con tàu khi ngược dòng :  $x - 5$ (km/h).

Thời gian ngược từ Hà Nội đến Việt Trì là :  $\frac{70}{x-5}$  (h).

Vận tốc con tàu khi xuôi dòng :  $x + 5$  (km/h).

Thời gian xuôi từ Việt Trì đến Hà Nội là :  $\frac{70}{x+5}$  (h).

Thời gian kể từ lúc xuất phát đến khi về tới Hà Nội là :

$$\frac{70}{x-5} + 2 + \frac{70}{x+5} \text{ (h)}.$$

b) Với  $x - 5 = 20$  hay  $x = 25$ , biểu thức vừa tìm được có giá trị bằng :

$$\frac{70}{20} + 2 + \frac{70}{25+5} = \frac{70}{20} + \frac{70}{30} + 2 = \frac{7}{2} + \frac{7}{3} + 2 \text{ (h)}.$$

Nhưng  $\frac{7}{2}$  giờ = 3 giờ 30 phút ;  $\frac{7}{3}$  giờ = 2 giờ 20 phút.

Vậy thời gian kể từ lúc xuất phát đến khi về tới Hà Nội là : 7 giờ 50 phút.

*Chú ý.* Cũng có thể tính như sau :

Ta có :

$$\frac{70}{x-5} + 2 + \frac{70}{x+5} = \frac{70(x+5) + 70(x-5)}{(x-5)(x+5)} + 2 = \frac{140x}{(x-5)(x+5)} + 2.$$

Với  $x - 5 = 20$ , biểu thức này có giá trị bằng :

$$\frac{3500}{20.30} + 2 = \frac{35}{6} + 2 = 5\frac{5}{6} + 2 = 7\frac{5}{6} \text{ (h) hay 7 giờ 50 phút.}$$

### Bài tập bổ sung

5.1. Chọn (C).

5.2. *Giải :*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} \\ &= \frac{1+x+1-x}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} \\ &= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} \\ &= \frac{2(1+x^2+1-x^2)}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} \\ &= \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} \\ &= \frac{4(1+x^4+1-x^4)}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} \\ &= \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} = \frac{8(1+x^8+1-x^8)}{1-x^{16}} + \frac{16}{1+x^{16}} \\ &= \frac{16}{1-x^{16}} + \frac{16}{1+x^{16}} = \frac{16(1+x^{16}+1-x^{16})}{1-x^{32}} = \frac{32}{1-x^{32}}. \end{aligned}$$

### §6. Phép trừ các phân thức đại số

24. a)  $\frac{1-2x}{xy}$  ;

b)  $\frac{9}{2x^2y}$  ;

c)  $\frac{1}{2}$  ;

d)  $\frac{2}{(x-1)(x+3)}$  ;

e)  $\frac{xy}{x^2-y^2} - \frac{x^2}{y^2-x^2} = \frac{xy+x^2}{x^2-y^2} = \frac{x(y+x)}{(x-y)(x+y)} = \frac{x}{x-y}$  ;

f)  $\frac{5x+y^2}{x^2y} - \frac{5y-x^2}{xy^2} = \frac{y(5x+y^2) - x(5y-x^2)}{x^2y^2}$   
 $= \frac{5xy+y^3-5xy+x^3}{x^2y^2} = \frac{x^3+y^3}{x^2y^2}$  ;

g)  $\frac{x}{5x+5} - \frac{x}{10x-10} = \frac{x}{5(x+1)} - \frac{x}{10(x-1)} = \frac{2x(x-1) - x(x+1)}{10(x+1)(x-1)} =$   
 $= \frac{2x^2 - 2x - x^2 - x}{10(x+1)(x-1)} = \frac{x^2 - 3x}{10(x+1)(x-1)}$  ;

h)  $\frac{x+9}{x^2-9} - \frac{3}{x^2+3x} = \frac{x+9}{(x-3)(x+3)} - \frac{3}{x(x+3)} = \frac{x(x+9) - 3(x-3)}{x(x-3)(x+3)} =$   
 $= \frac{x^2+9x-3x+9}{x(x-3)(x+3)} = \frac{x^2+6x+9}{x(x-3)(x+3)} =$   
 $= \frac{(x+3)^2}{x(x-3)(x+3)} = \frac{x+3}{x(x-3)}$ .

25. a)  $\frac{1}{3x-2} - \frac{1}{3x+2} - \frac{3x-6}{4-9x^2} = \frac{3x+2 - (3x-2) + 3x-6}{(3x-2)(3x+2)} =$   
 $= \frac{3x+2-3x+2+3x-6}{(3x-2)(3x+2)} = \frac{3x-2}{(3x-2)(3x+2)} = \frac{1}{3x+2}$  ;

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{18}{(x-3)(x^2-9)} - \frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{x}{x^2-9} &= \frac{18-3(x+3)-x(x-3)}{(x+3)(x-3)^2} = \\ &= \frac{18-3x-9-x^2+3x}{(x+3)(x-3)^2} = \frac{9-x^2}{(x+3)(x-3)^2} = \frac{1}{3-x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{26. a) } \frac{3x^2+5x+1}{x^3-1} - \frac{1-x}{x^2+x+1} - \frac{3}{x-1} &= \\ &= \frac{3x^2+5x+1-(1-x)(x-1)-3(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{3x^2+5x+1+x^2-2x+1-3x^2-3x-3}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{x^2-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+1}{x^2+x+1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1}{x^2-x+1} + 1 - \frac{x^2+2}{x^3+1} &= \frac{x+1+x^3+1-x^2-2}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{x^3-x^2+x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{x}{x+1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{7}{x} - \frac{x}{x+6} + \frac{36}{x^2+6x} &= \frac{7(x+6)-x^2+36}{x(x+6)} = \frac{7x+42-x^2+36}{x(x+6)} = \\ &= \frac{-x^2+7x+78}{x(x+6)} = \frac{-x^2-6x+13x+78}{x(x+6)} = \\ &= \frac{-x(x+6)+13(x+6)}{x(x+6)} \\ &= \frac{(x+6)(13-x)}{x(x+6)} = \frac{13-x}{x}. \end{aligned}$$

27. – Số bút mua được nếu mua lẻ từng chiếc :  $\frac{180\,000}{x}$  (bút).

– Vì giá tiền một bút không quá 1 200 đồng nên nếu mua cùng một lúc thì số bút mua được lớn hơn 10. Khi đó số bút mua được là :  $\frac{180\,000}{x-100}$  (bút).

– Số bút được lợi khi mua cùng một lúc so với khi mua lẻ là :

$$\frac{180\,000}{x-100} - \frac{180\,000}{x} \text{ (bút).}$$

28. b) Áp dụng câu a), ta được kết quả là  $\frac{1}{x}$ .

### Bài tập bổ sung

6.1. Chọn (B).

6.2. *Giải* : a)  $Q = \frac{1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{x - x^2} - \frac{x^2 + 2x}{x^3 - 1}$

$$= \frac{1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{x^2 - x} - \frac{x^2 + 2x}{x^3 - 1}$$
$$= \frac{x^2 - x + x^2 + x + 1 - x^3 - 2x^2}{x(x^3 - 1)} = \frac{1 - x^3}{x(x^3 - 1)} = -\frac{1}{x}.$$

b)  $Q = \frac{6}{x-3} - \frac{2x^2}{1-x^2} - \frac{2x-6}{x^3-3x^2-x+3}$

$$= \frac{6}{x-3} + \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)} - \frac{2x-6}{x^2(x-3)-(x-3)}$$
$$= \frac{6}{x-3} + \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)} - \frac{2x-6}{(x-3)(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{6(x^2-1) + 2x^2(x-3) - 2x + 6}{(x-3)(x-1)(x+1)} = \frac{6x^2 - 6 + 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6}{(x-3)(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{2x^3 - 2x}{(x-3)(x-1)(x+1)} = \frac{2x(x^2-1)}{(x-3)(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{x-3}.$$

**§7. Phép nhân các phân thức đại số**

29. a)  $\frac{66x^2y^3}{5}$  ;                      b)  $-\frac{6y^2}{x}$  ;                      c)  $\frac{6}{5x^2}$  ;

d)  $\frac{8}{(x-10)^2(x+2)}$  ;                      e)  $\frac{x-1}{6(x-5)}$ .

30. a)  $\frac{x+3}{x^2-4} \cdot \frac{8-12x+6x^2-x^3}{9x+27} = \frac{(x+3)(2-x)^3}{(x+2)(x-2) \cdot 9(x+3)} = -\frac{(x-2)^2}{9(x+2)}$  ;

b)  $\frac{6x-3}{5x^2+x} \cdot \frac{25x^2+10x+1}{1-8x^3} = \frac{3(2x-1)(5x+1)^2}{x(5x+1)(1-2x)(1+2x+4x^2)}$   
 $= -\frac{3(5x+1)}{x(1+2x+4x^2)}$  ;

c)  $\frac{3x^2-x}{x^2-1} \cdot \frac{1-x^4}{(1-3x)^3} = \frac{x(3x-1)(1-x^2)(1+x^2)}{(x^2-1)(1-3x)^3} = \frac{x(1+x^2)}{(1-3x)^2}$ .

31. a)  $\frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6} = \frac{(x-2)(x^2+x-3x-3)}{(x+1)(x^2-2x-3x+6)} = \frac{(x-2)(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-2)(x-3)} = 1$  ;

b)  $\frac{x+1}{x^2-2x-8} \cdot \frac{4-x}{x^2+x} = \frac{(x+1)(4-x)}{(x^2-4x+2x-8)(x+1)x}$   
 $= \frac{4-x}{x(x-4)(x+2)} = -\frac{1}{x(x+2)}$  ;

c)  $\frac{x+2}{4x+24} \cdot \frac{x^2-36}{x^2+x-2} = \frac{(x+2)(x-6)(x+6)}{4(x+6)(x^2-x+2x-2)}$   
 $= \frac{(x+2)(x-6)}{4(x+2)(x-1)} = \frac{x-6}{4(x-1)}$ .

32. a)  $\frac{x^3}{x+1975} \cdot \frac{2x+1954}{x+1} + \frac{x^3}{x+1975} \cdot \frac{21-x}{x+1} = \frac{x^3}{x+1975} \left( \frac{2x+1954}{x+1} + \frac{21-x}{x+1} \right)$   
 $= \frac{x^3}{x+1975} \cdot \frac{x+1975}{x+1} = \frac{x^3}{x+1}$  ;

b)  $\frac{19x+8}{x-7} \cdot \frac{5x-9}{x+1945} - \frac{19x+8}{x-7} \cdot \frac{4x-2}{x+1945} = \frac{19x+8}{x-7} \cdot \frac{5x-9-(4x-2)}{x+1945}$   
 $= \frac{(19x+8)(x-7)}{(x-7)(x+1945)} = \frac{19x+8}{x+1945}$ .

33. a) Vì  $4a^2 - 9 = (2a + 3)(2a - 3)$  nên với  $a \neq \pm \frac{3}{2}$  thì  $4a^2 - 9 \neq 0$ .

$$\text{Do đó } x = \frac{4a + 4}{(2a - 3)(2a + 3)}.$$

$$\text{Vì } 3a^3 + 3 = 3(a + 1)(a^2 - a + 1)$$

$$\text{và } a^2 - a + 1 = a^2 - 2a \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

$$\text{nên với } a \neq -1 \text{ thì } 3a^3 + 3 \neq 0. \text{ Do đó } y = \frac{6a^2 + 9a}{3a^3 + 3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } x \cdot y &= \frac{4a + 4}{4a^2 - 9} \cdot \frac{6a^2 + 9a}{3a^3 + 3} = \frac{4(a + 1)3a(2a + 3)}{(2a + 3)(2a - 3) \cdot 3(a + 1)(a^2 - a + 1)} \\ &= \frac{4a}{(2a - 3)(a^2 - a + 1)}; \end{aligned}$$

b) Vì  $2a^3 - 2b^3 = 2(a - b)(a^2 + ab + b^2)$  và

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 + 2a \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

$$\text{nên với } a \neq b \text{ thì } 2a^3 - 2b^3 \neq 0. \text{ Do đó } x = \frac{3a + 3b}{2a^3 - 2b^3}.$$

$$\text{Với } a \neq -b, \text{ ta có } 6a + 6b = 6(a + b) \neq 0 \text{ nên } y = \frac{(a - b)^2}{6a + 6b}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } x \cdot y &= \frac{3a + 3b}{2a^3 - 2b^3} \cdot \frac{(a - b)^2}{6a + 6b} = \frac{3(a + b)(a - b)^2}{2(a - b)(a^2 + ab + b^2) \cdot 6(a + b)} \\ &= \frac{a - b}{4(a^2 + ab + b^2)}. \end{aligned}$$

34. HD : Áp dụng tính chất giao hoán của phép nhân.

$$\text{ĐS: a) } \frac{2x}{14x^2 + 1}; \quad \text{b) } \frac{3x}{x^2 - 1}.$$

35.  $x + 10$ .

## Bài tập bổ sung

7.1. a) 1 ;      b)  $\frac{1}{2}$ .

7.2. *Giải* :  $\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot \frac{1}{1+x^8} \cdot \frac{1}{1+x^{16}}$   
 $= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot \frac{1}{1+x^8} \cdot \frac{1}{1+x^{16}} = \frac{1}{1-x^4} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot \frac{1}{1+x^8} \cdot \frac{1}{1+x^{16}}$   
 $= \frac{1}{1-x^8} \cdot \frac{1}{1+x^8} \cdot \frac{1}{1+x^{16}} = \frac{1}{1-x^{16}} \cdot \frac{1}{1+x^{16}} = \frac{1}{1-x^{32}}.$

## §8. Phép chia các phân thức đại số

36. a)  $\frac{7x+2}{3xy^3} : \frac{14x+4}{x^2y} = \frac{7x+2}{3xy^3} \cdot \frac{x^2y}{14x+4} = \frac{x}{6y^2} ;$

b)  $\frac{8xy}{3x-1} : \frac{12xy^3}{5-15x} = \frac{8xy}{3x-1} \cdot \frac{5-15x}{12xy^3} = -\frac{10}{3y^2} ;$

c)  $\frac{27-x^3}{5x+5} : \frac{2x-6}{3x+3} = \frac{27-x^3}{5x+5} \cdot \frac{3x+3}{2x-6}$   
 $= \frac{(3-x)(9+3x+x^2) \cdot 3(x+1)}{5(x+1) \cdot 2(x-3)} = -\frac{3(x^2+3x+9)}{10} ;$

d)  $(4x^2-16) : \frac{3x+6}{7x-2} = \frac{(4x^2-16)(7x-2)}{3x+6} = \frac{4(x-2)(x+2)(7x-2)}{3(x+2)}$   
 $= \frac{4(x-2)(7x-2)}{3} ;$

e)  $\frac{3x^3+3}{x-1} : (x^2-x+1) = \frac{3(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x^2-x+1)} = \frac{3(x+1)}{x-1}.$

37. a)  $\frac{4(x+3)}{3x^2-x} : \frac{x^2+3x}{1-3x} = \frac{4(x+3)}{x(3x-1)} \cdot \frac{1-3x}{x(x+3)} = -\frac{4}{x^2} ;$



$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{4x+6y}{x-1} : \frac{4x^2+12xy+9y^2}{1-x^3} &= \frac{2(2x+3y)}{x-1} \cdot \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{(2x+3y)^2} \\ &= -\frac{2(x^2+x+1)}{2x+3y}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{38. a) } \frac{x^4-xy^3}{2xy+y^2} : \frac{x^3+x^2y+xy^2}{2x+y} &= \frac{x(x^3-y^3)}{y(2x+y)} \cdot \frac{2x+y}{x^3+x^2y+xy^2} \\ &= \frac{x(x-y)(x^2+xy+y^2)(2x+y)}{xy(2x+y)(x^2+xy+y^2)} = \frac{x-y}{y}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{5x^2-10xy+5y^2}{2x^2-2xy+2y^2} : \frac{8x-8y}{10x^3+10y^3} &= \frac{5(x-y)^2}{2(x^2-xy+y^2)} \cdot \frac{10(x+y)(x^2-xy+y^2)}{8(x-y)} \\ &= \frac{25(x-y)(x+y)}{8} = \frac{25}{8}(x^2-y^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{39. a) } \frac{x^2-5x+6}{x^2+7x+12} : \frac{x^2-4x+4}{x^2+3x} &= \frac{x^2-2x-3x+6}{x^2+3x+4x+12} \cdot \frac{x(x+3)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x(x+3)(x-2)(x-3)}{(x+3)(x+4)(x-2)^2} = \frac{x(x-3)}{(x+4)(x-2)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x^2+2x-3}{x^2+3x-10} : \frac{x^2+7x+12}{x^2-9x+14} &= \frac{x^2-x+3x-3}{x^2+5x-2x-10} \cdot \frac{x^2-2x-7x+14}{x^2+3x+4x+12} = \\ &= \frac{(x-1)(x+3)(x-2)(x-7)}{(x+5)(x-2)(x+3)(x+4)} = \frac{(x-1)(x-7)}{(x+5)(x+4)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{40. a) } Q &= \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-xy+y^2} : \frac{x-y}{x^3+y^3} = \frac{(x-y)^2}{x^2-xy+y^2} \cdot \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x-y} = \\ &= (x-y)(x+y) = x^2-y^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } Q &= \frac{3x^2+3xy}{x^2+xy+y^2} : \frac{x+y}{x^3-y^3} = \frac{3x(x+y)}{x^2+xy+y^2} \cdot \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x+y} \\ &= 3x(x-y). \end{aligned}$$

41. a)  $\frac{x+1}{x+2} : \frac{x+2}{x+3} : \frac{x+3}{x+1} = \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x+2} \cdot \frac{x+1}{x+3} = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2}$  ;

b)  $\frac{x+1}{x+2} : \left( \frac{x+2}{x+3} : \frac{x+3}{x+1} \right) = \frac{x+1}{x+2} : \frac{(x+2)(x+1)}{(x+3)^2}$   
 $= \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{(x+3)^2}{(x+2)(x+1)} = \frac{(x+3)^2}{(x+2)^2}$  ;

c)  $\frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x+3} : \frac{x+3}{x+1} = \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x+3} \cdot \frac{x+1}{x+3} = \frac{(x+1)^2}{(x+3)^2}$  ;

d)  $\frac{x+1}{x+2} \cdot \left( \frac{x+2}{x+3} : \frac{x+3}{x+1} \right) = \frac{x+1}{x+2} \cdot \left( \frac{x+2}{x+3} \cdot \frac{x+1}{x+3} \right)$   
 $= \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{(x+2)(x+1)}{(x+3)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x+3)^2}$  ;

e)  $\frac{x+1}{x+2} : \frac{x+2}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x+1} = \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x+1} = \frac{(x+3)^2}{(x+2)^2}$  ;

f)  $\frac{x+1}{x+2} : \left( \frac{x+2}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x+1} \right) = \frac{x+1}{x+2} : \frac{x+2}{x+1} = \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+1}{x+2} = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2}$ .

42. Gọi quãng đường từ Hà Nội đến Huế là  $y$ (km) thì quãng đường từ Huế đến TP. Hồ Chí Minh là  $y + 411$ (km). Mặt khác,  $y + y + 411 = x$ . Do đó :

a) Quãng đường từ Hà Nội đến Huế là :  $y = \frac{x-411}{2}$  (km) ;

Quãng đường từ Huế đến TP. Hồ Chí Minh là :

$$\frac{x-411}{2} + 411 = \frac{x+411}{2} \text{ (km) ;}$$

b) Vận tốc của con tàu thứ hai là :

$$\frac{x+411}{2} : 20 = \frac{x+411}{40} \text{ (km/h) ;}$$

c) Thời gian đi của con tàu thứ hai từ Hà Nội đến Huế là :

$$\frac{x-411}{2} : \frac{x+411}{40} = \frac{20(x-411)}{x+411} \text{ (h)} ;$$

d) Thời gian đi của con tàu thứ nhất từ TP. Hồ Chí Minh đến Huế là :

$$\frac{20(x-411)}{x+411} + 8 = \frac{28x-12.411}{x+411} \text{ (h)} ;$$

e) Vận tốc của con tàu thứ nhất là :

$$\frac{x+411}{2} : \frac{28x-12.411}{x+411} = \frac{(x+411)^2}{8(7x-1233)} \text{ (km/h)} ;$$

f) Thời gian đi của con tàu thứ nhất từ Huế đến Hà Nội là :

$$\frac{x-411}{2} : \frac{(x+411)^2}{8(7x-1233)} = \frac{4(x-411)(7x-1233)}{(x+411)^2} \text{ (h)}.$$

43. *HD* : Đổi phép chia thành phép nhân với phân thức nghịch đảo, ta trở về bài toán tương tự như bài tập 35.

*ĐS* : Phân thức phải điền vào là :  $\frac{x}{x+5}$ .

### Bài tập bổ sung

8.1. Không.

8.2. *Giải* : a)  $P = \frac{4x^2 + 4x + 1}{x-2} \cdot \frac{4x^2 - 16}{2x+1} = \frac{(2x+1)^2 \cdot 4(x-2)(x+2)}{(x-2)(2x+1)}$   
 $= 4(x+2)(2x+1).$

b)  $P = \frac{2x^2 + 4x + 8}{x^3 - 3x^2 - x + 3} : \frac{x^3 - 8}{(x+1)(x-3)}$   
 $= \frac{2(x^2 + 2x + 4)}{(x-1)(x+1)(x-3)} \cdot \frac{(x+1)(x-3)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{2}{(x-1)(x-2)}.$

### §9. Biến đổi các biểu thức hữu tỉ. Giá trị của phân thức

44. a)  $\frac{1}{2} + \left[ x : \left( 1 - \frac{x}{x+2} \right) \right] = \frac{1}{2} + \left( x : \frac{x+2-x}{x+2} \right)$   
 $= \frac{1}{2} + \frac{x(x+2)}{2} = \frac{x^2 + 2x + 1}{2} = \frac{(x+1)^2}{2} ;$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(x - \frac{1}{x^2}\right) : \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) &= \frac{x^3 - 1}{x^2} : \frac{x^2 + x + 1}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)(x^2 + x + 1) \cdot x^2}{x^2(x^2 + x + 1)} = x - 1 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(1 - \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) &= \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2} : \frac{y - x}{xy} \\ &= \frac{(y-x)^2}{x^2} \cdot \frac{xy}{y-x} = \frac{y(y-x)}{x} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \left(\frac{x}{4} - 1 + \frac{3}{4x}\right) : \left(\frac{x}{2} - \frac{6}{x} + \frac{1}{2}\right) &= \frac{x^2 - 4x + 3}{4x} : \frac{x^2 + x - 12}{2x} \\ &= \frac{x^2 - x - 3x + 3}{4x} \cdot \frac{2x}{x^2 - 3x + 4x - 12} \\ &= \frac{(x-1)(x-3)2x}{4x(x-3)(x+4)} = \frac{x-1}{2(x+4)} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45. \text{ a) } \left(\frac{5x+y}{x^2-5xy} + \frac{5x-y}{x^2+5xy}\right) \cdot \frac{x^2-25y^2}{x^2+y^2} &= \\ &= \left(\frac{5x+y}{x(x-5y)} + \frac{5x-y}{x(x+5y)}\right) \cdot \frac{(x-5y)(x+5y)}{x^2+y^2} = \\ &= \frac{(5x+y)(x+5y) + (5x-y)(x-5y)}{x(x-5y)(x+5y)} \cdot \frac{(x-5y)(x+5y)}{x^2+y^2} = \frac{10(x^2+y^2)}{x(x^2+y^2)} = \frac{10}{x} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{4xy}{y^2-x^2} : \left(\frac{1}{x^2+2xy+y^2} - \frac{1}{x^2-y^2}\right) &= \\ &= \frac{4xy}{(y-x)(y+x)} : \left(\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x-y)(x+y)}\right) = \\ &= \frac{4xy}{(y-x)(y+x)} \cdot \frac{x-y-x-y}{(x-y)(x+y)^2} = \frac{4xy}{(y-x)(y+x)} \cdot \frac{(x-y)(x+y)^2}{-2y} = 2x(x+y) ; \end{aligned}$$



b)  $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \neq 0$  khi  $x \neq \pm\sqrt{2}$ .

Do đó có thể chọn phân thức  $\frac{1}{x^2 - 2}$ .

- 50.** Chỉ việc chọn hai phân thức nghịch đảo nhau với tử và mẫu đều chứa biến  $x$  và không có giá trị nào của  $x$  để tử và mẫu đồng thời bằng 0. Chẳng hạn,  $\frac{x-1}{x+1}$  và  $\frac{x+1}{x-1}$ . Có vô số cặp phân thức như thế.

- 51.** a) Điều kiện của  $x$  là  $x \neq \frac{1}{3}$ .

$$\frac{3x^2 - x}{9x^2 - 6x + 1} = \frac{x}{3x - 1}. \text{ Với } x = -8 \text{ biểu thức có giá trị bằng: } \frac{-8}{3(-8) - 1} = \frac{8}{25};$$

- b)  $x^3 + 2x^2 - x - 2 = x^2(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(x + 1)(x - 1) \neq 0$  khi  $x \neq -2$ ,  $x \neq -1$ ,  $x \neq 1$ . Do đó điều kiện của  $x$  là  $x \neq -2$ ,  $x \neq -1$ ,  $x \neq 1$ .

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{(x + 1)(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)} = \frac{1}{x - 1}.$$

Với  $x = 1\,000\,001$ , biểu thức có giá trị bằng:  $\frac{1}{1\,000\,001 - 1} = \frac{1}{1\,000\,000}$ .

- 52.** a) Điều kiện  $x \neq \pm y$ . Ta có  $\frac{x^2 - y^2}{(x + y)(6x - 6y)} = \frac{1}{6}$ .

- b) Vì  $a \neq -\frac{3}{2}$  nên

$$4ax + 6x + 9y + 6ay = 2x(2a + 3) + 3y(2a + 3) = (2a + 3)(2x + 3y) \neq 0$$

khi  $x \neq -\frac{3}{2}y$ . Vậy khi  $x \neq -\frac{3}{2}y$  thì

$$\frac{2ax - 2x - 3y + 3ay}{4ax + 6x + 9y + 6ay} = \frac{(a - 1)(2x + 3y)}{(2a + 3)(2x + 3y)} = \frac{a - 1}{2a + 3}.$$

- 53.** Điều kiện  $x \neq 0$ ,  $x \neq 2$ .

$$\frac{4x^2 - 4x^3 + x^4}{x^3 - 2x^2} = \frac{x^2(x - 2)^2}{x^2(x - 2)} = x - 2.$$

a) Nếu phân thức có giá trị bằng  $-2$  thì biểu thức  $x - 2$  cũng có giá trị bằng  $-2$ . Nhưng  $x - 2 = -2$  khi  $x = 0$  không thoả mãn điều kiện của  $x$ . Vậy không có giá trị nào của  $x$  để phân thức có giá trị bằng  $-2$ .

b) Tương tự  $x - 2 = 2$  khi  $x = 4$ . Vì  $x = 4$  thoả mãn điều kiện nên đó là giá trị phải tìm.

c) Tương tự  $x - 2 = 0$  khi  $x = 2$  (không thoả mãn điều kiện). Vậy không có giá trị nào của  $x$  để phân thức có giá trị bằng  $0$ .

**54.** a) Điều kiện :  $x \neq 0, x \neq -5$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x^2 + 2x}{2x + 10} + \frac{x - 5}{x} + \frac{50 - 5x}{2x(x + 5)} &= \frac{x^3 + 2x^2 + 2x^2 - 50 + 50 - 5x}{2x(x + 5)} \\ &= \frac{x(x^2 + 2x + 2x - 5)}{2x(x + 5)} = \frac{x^2 - x + 5x - 5}{2(x + 5)} = \\ &= \frac{(x - 1)(x + 5)}{2(x + 5)} = \frac{x - 1}{2}. \end{aligned}$$

Nếu giá trị của biểu thức bằng  $1$  thì giá trị của  $\frac{x - 1}{2}$  cũng bằng  $1$ . Ta có :

$\frac{x - 1}{2} = 1$  khi  $x - 1 = 2$  hay  $x = 3$ . Vì  $x = 3$  thoả mãn điều kiện nên đó là giá trị phải tìm.

c) Lập luận tương tự  $\frac{x - 1}{2} = -\frac{1}{2}$  khi  $x - 1 = -1$  hay  $x = 0$  (không thoả mãn điều kiện). Vậy không có giá trị nào của  $x$  để phân thức có giá trị bằng  $-\frac{1}{2}$ .

d) Tương tự  $\frac{x - 1}{2} = -3$  khi  $x - 1 = -6$  hay  $x = -5$  (không thoả mãn điều kiện). Vậy không có giá trị nào của  $x$  để phân thức có giá trị bằng  $-3$ .

**55.** a) Điều kiện :  $x \neq -1, x \neq 1$ .

$$\begin{aligned} \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 1} - \frac{2x + 3}{x^2 - 1} &= \frac{(2x + 1)(x + 1) - (2x + 3)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 3x + 1 - 2x^2 - x + 3}{(x + 1)(x - 1)^2} = \frac{2x + 4}{(x + 1)(x - 1)^2}. \end{aligned}$$

Biểu thức bằng 0 khi tử số bằng 0 và mẫu số khác 0. Ta có :  $2x + 4 = 0$  khi  $x = -2$ . Vì  $x = -2$  thoả mãn điều kiện nên mẫu có giá trị khác 0.

Vậy  $x = -2$  là giá trị phải tìm.

b) Điều kiện :  $x \neq -3, x \neq 3$ .

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-3} - \frac{6x}{9-x^2} + \frac{x}{x+3} &= \frac{3(x+3)+6x+x(x-3)}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{3x+9+6x+x^2-3x}{(x-3)(x+3)} = \frac{x^2+6x+9}{(x-3)(x+3)} = \frac{x+3}{x-3}. \end{aligned}$$

Lập luận tương tự như câu a),  $\frac{x+3}{x-3} = 0$  khi  $x+3 = 0$  và  $x-3 \neq 0$ , tức là khi

$x = -3$  (không thoả mãn điều kiện). Vậy không có giá trị nào của  $x$  để phân thức có giá trị bằng 0.

**56.** a) Điều kiện :  $x \neq -2, x \neq 2$ .

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2-4} + \frac{3}{(x+2)^2} &= \frac{x^2+2x+3x-6}{(x-2)(x+2)^2} = \frac{x^2-x+6x-6}{(x-2)(x+2)^2} = \frac{(x-1)(x+6)}{(x-2)(x+2)^2}. \\ \frac{(x-1)(x+6)}{(x-2)(x+2)^2} &= 0 \text{ khi } (x-1)(x+6) = 0 \text{ và } (x-2)(x+2) \neq 0. \end{aligned}$$

Vậy  $x = 1, x = -6$  là các giá trị cần tìm.

b)  $x = 0$ .

**57.** a)  $x - 3$  là ước của 2. Tập các ước của 2 là  $\{-2, -1, 1, 2\}$ .

Nếu  $x - 3 = -2$  thì  $x = 1$  ; Nếu  $x - 3 = -1$  thì  $x = 2$ .

Nếu  $x - 3 = 1$  thì  $x = 4$  ; Nếu  $x - 3 = 2$  thì  $x = 5$ .

ĐS :  $x = 1, x = 2, x = 4, x = 5$ .

b)  $x + 2$  là ước của 3. Tập hợp các ước của 3 là  $\{-3, -1, 1, 3\}$ .

ĐS :  $x = -5, x = -3, x = -1, x = 1$ .

c)  $\frac{3x^3-4x^2+x-1}{x-4} = 3x^2+8x+33+\frac{131}{x-4}$ . Vì 131 là một số nguyên tố nên

tập hợp các ước của 131 là  $\{-1, 1, -131, 131\}$ .

ĐS :  $x = 3, x = 5, x = -127, x = 135$ .



## Bài tập bổ sung

9.1. Chọn (C).

9.2. *Giải* : a) Điều kiện  $x \neq 0, x \neq -\frac{1}{2}$ .

$$\text{Khi đó ta có } 1 + x^2 + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{x}.$$

Suy ra  $x^2 = 1$ . Vậy  $x = \pm 1$ .

b) Điều kiện  $x \neq -1, x \neq 1$ . Khi đó ta có  $1 + x^2 - \frac{4}{x+1} = 2 - \frac{4}{x+1}$ .

Suy ra  $x^2 = 1$ . Do đó  $x = \pm 1$ . Nhưng  $x = \pm 1$ , không thoả mãn điều kiện của biến. Vậy không có giá trị nào của  $x$  để giá trị tương ứng của biểu thức bằng 1.

## Bài tập ôn chương II

$$\begin{aligned} 58. \quad \text{a) } & \left( \frac{9}{x^3 - 9x} + \frac{1}{x+3} \right) : \left( \frac{x-3}{x^2+3x} - \frac{x}{3x+9} \right) = \frac{9+x(x-3)}{x(x-3)(x+3)} : \frac{3(x-3)-x^2}{3x(x+3)} = \\ & = \frac{x^2-3x+9}{x(x-3)(x+3)} \cdot \frac{3x(x+3)}{-x^2+3x-9} = \frac{3}{3-x}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \left( \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+2} \right) \cdot \frac{x^2+4x+4}{8} = \frac{2(x+2)-2(x-2)}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x+2)^2}{8} \\ & = \frac{8(x+2)^2}{8(x-2)(x+2)} = \frac{x+2}{x-2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \left( \frac{3x}{1-3x} + \frac{2x}{3x+1} \right) : \frac{6x^2+10x}{1-6x+9x^2} = \frac{3x(3x+1)+2x(1-3x)}{(1-3x)(1+3x)} : \frac{2x(3x+5)}{(1-3x)^2} = \\ & = \frac{3x^2+5x}{(1-3x)(1+3x)} \cdot \frac{(1-3x)^2}{2x(3x+5)} = \frac{1-3x}{2(1+3x)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } & \left( \frac{x}{x^2-25} - \frac{x-5}{x^2+5x} \right) : \frac{2x-5}{x^2+5x} + \frac{x}{5-x} = \\
 & = \frac{x \cdot x - (x-5)^2}{x(x-5)(x+5)} \cdot \frac{x^2+5x}{2x-5} + \frac{x}{5-x} = \\
 & = \frac{10x-25}{x(x-5)(x+5)} \cdot \frac{x(x+5)}{2x-5} + \frac{x}{5-x} = \frac{5}{x-5} + \frac{-x}{x-5} = \frac{5-x}{x-5} = -1 ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } & \left( \frac{x^2+xy}{x^3+x^2y+xy^2+y^3} + \frac{y}{x^2+y^2} \right) : \left( \frac{1}{x-y} - \frac{2xy}{x^3-x^2y+xy^2-y^3} \right) = \\
 & = \left[ \frac{x^2+xy}{(x+y)(x^2+y^2)} + \frac{y}{x^2+y^2} \right] : \left[ \frac{1}{x-y} - \frac{2xy}{(x-y)(x^2+y^2)} \right] = \\
 & = \frac{x+y}{x^2+y^2} : \frac{x^2+y^2-2xy}{(x-y)(x^2+y^2)} \\
 & = \frac{x+y}{x^2+y^2} \cdot \frac{(x-y)(x^2+y^2)}{(x-y)^2} = \frac{x+y}{x-y} .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{59. a) } & \left( \frac{x^2-2x}{2x^2+8} - \frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3} \right) \cdot \left( 1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) = \\
 & = \left[ \frac{x^2-2x}{2(x^2+4)} - \frac{2x^2}{2(x^2+4)-x(x^2+4)} \right] \cdot \frac{x^2-x-2}{x^2} = \\
 & = \left[ \frac{x^2-2x}{2(x^2+4)} - \frac{2x^2}{(2-x)(x^2+4)} \right] \cdot \frac{x^2-x-2}{x^2} \\
 & = \frac{(x^2-2x)(2-x)-4x^2}{2(2-x)(x^2+4)} \cdot \frac{x^2+x-2x-2}{x^2} \\
 & = \frac{-x(x^2+4)}{2(2-x)(x^2+4)} \cdot \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} = \frac{x+1}{2x} ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & \left[ \frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left( \frac{x+1}{3x} - x-1 \right) \right] : \frac{x-1}{x} = \\
 & = \left( \frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{x+1}{3x} + \frac{2}{x+1} \cdot \frac{x+1}{1} \right) \cdot \frac{x}{x-1} = \\
 & = \left( \frac{2}{3x} - \frac{2}{3x} + 2 \right) \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } & \left[ \frac{2}{(x+1)^3} \left( \frac{1}{x} + 1 \right) + \frac{1}{x^2+2x+1} \left( \frac{1}{x^2} + 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x^3} = \\
 & = \left[ \frac{2}{(x+1)^3} \cdot \frac{1+x}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \frac{1+x^2}{x^2} \right] \cdot \frac{x^3}{x-1} \\
 & = \left[ \frac{2}{x(x+1)^2} + \frac{x^2+1}{x^2(x+1)^2} \right] \cdot \frac{x^3}{x-1} = \frac{(x^2+2x+1) \cdot x^3}{x^2(x+1)^2(x-1)} = \frac{x}{x-1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{60. a) } & \left( \frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x} \right) : \left( \frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} \right) = \frac{x^2 - x^2 + 1}{x(x-1)} : \frac{x^2 - x^2 + 1}{x(x+1)} \\
 & = \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x-1};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & \left( \frac{5}{4} - \frac{5}{x+1} \right) : \frac{9-x^2}{x^2+2x+1} = \frac{5x+5-20}{4(x+1)} \cdot \frac{(x+1)^2}{9-x^2} \\
 & = \frac{5(x-3)(x+1)^2}{4(x+1)(3-x)(3+x)} = -\frac{5(x+1)}{4(x+3)}.
 \end{aligned}$$

$$\text{61. a) } x = \pm \frac{1}{7};$$

$$\text{b) } x = \frac{2}{3}.$$

$$\text{62. a) Điều kiện : } x \neq -2, x \neq 1;$$

$$\text{b) } x \neq 0, x \neq 1;$$

$$\text{c) } x \neq 0, x \neq 5;$$

$$\text{d) } x \neq -5, x \neq 5.$$

63. a)  $x = \frac{3}{2}$  ;

b) Không có giá trị nào của  $x$  để giá trị của biểu thức bằng 0 vì  $x^2 + 1 \geq 1$  với mọi giá trị của  $x$  ;

c)  $x = -5$ , ( $x^2 - 25 = 0$  khi  $x = 5$  hoặc  $x = -5$ , nhưng khi  $x = 5$  thì giá trị của mẫu cũng bằng 0, giá trị của phân thức không xác định ; do đó giá trị của phân thức bằng 0 chỉ khi  $x = -5$ ) ;

d) Không có giá trị nào của  $x$  để giá trị của biểu thức bằng 0.

64. *HD* : Giá trị của biểu thức  $\frac{P}{Q}$  được xác định khi giá trị của  $P$  xác định còn giá trị của  $Q$  xác định và khác 0.

a) Giá trị của  $x - \frac{1}{x}$  xác định khi  $x \neq 0$ , còn giá trị của

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x} - \frac{2x + 2}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}$$

xác định và khác 0 khi  $x \neq 0$  và  $x^2 - 1 \neq 0$ . Do đó điều kiện của  $x$  là :  $x \neq 0$ ,  $x \neq 1$ ,  $x \neq -1$ . Với điều kiện đó ta có :

$$\frac{x - \frac{1}{x}}{\frac{x^2 + 2x + 1}{x} - \frac{2x + 2}{x}} = \frac{x^2 - 1}{x} : \frac{x^2 - 1}{x} = 1 ;$$

b)  $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2 + 1}{(x+1)(x-1)}$  có giá trị xác định khi  $x \neq \pm 1$ ,

$$\frac{2x+2}{x-1} - \frac{4x}{x^2-1} = \frac{2(x+1)^2 - 4x}{(x-1)(x+1)} = \frac{2(x^2+1)}{(x-1)(x+1)}$$
 có giá trị xác định và

khác 0 cũng khi  $x \neq \pm 1$ .

Do đó điều kiện của  $x$  là  $x \neq 1, x \neq -1$ . Ta có :

$$\frac{\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1}}{\frac{2x+2}{x-1} - \frac{4x}{x^2-1}} = \frac{\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}}{\frac{2(x^2+1)}{(x-1)(x+1)}} = \frac{1}{2} ;$$

c) Điều kiện :  $x \neq 1, x \neq -1$ . Ta có :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} - \frac{x^3-x}{x^2+1} \left( \frac{x}{x^2-2x+1} - \frac{1}{x^2-1} \right) &= \frac{1}{x-1} - \frac{x(x^2-1)}{x^2+1} \cdot \frac{x(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)^2} = \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{x(x-1)(x+1)}{x^2+1} \cdot \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x-1} = \frac{1-x}{x-1} = -1 ; \end{aligned}$$

d) Điều kiện :  $x \neq -6, x \neq 6, x \neq 3, x \neq 0$ . Ta có :

$$\begin{aligned} \left( \frac{x}{x^2-36} - \frac{x-6}{x^2+6x} \right) : \frac{2x-6}{x^2+6x} + \frac{x}{6-x} &= \frac{x^2-(x-6)^2}{x(x-6)(x+6)} \cdot \frac{x(x+6)}{2(x-3)} + \frac{x}{6-x} = \\ &= \frac{12x-36}{2(x-6)(x-3)} + \frac{x}{6-x} = \frac{6}{x-6} + \frac{-x}{x-6} = \frac{6-x}{x-6} = -1. \end{aligned}$$

65. a) Biểu thức  $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$  xác định khi  $x \neq 0$ .

$$\frac{x^2+1}{x^2} + \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1\right) = \frac{x^2+1}{x^2} + \frac{2}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{x^2+2x+1}{x^2} = \frac{(x+1)^2}{x^2}.$$

Biểu thức này xác định và khác 0 khi  $x \neq 0$  và  $x \neq -1$ .

Vậy điều kiện của  $x$  là  $x \neq 0, x \neq -1$ .

$$\text{Ta có : } \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 : \left[\frac{x^2+1}{x^2} + \frac{2}{x+1} \left(\frac{1}{x} + 1\right)\right] = \frac{(x+1)^2}{x^2} : \frac{(x+1)^2}{x^2} = 1.$$

b) Với điều kiện  $x \neq 0, x \neq \pm 3, x \neq -\frac{3}{2}$  ta có :

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-3} - \frac{x^2+3x}{2x+3} \cdot \left( \frac{x+3}{x^2-3x} - \frac{x}{x^2-9} \right) &= \frac{x}{x-3} - \frac{x(x+3)}{2x+3} \cdot \frac{(x+3)^2 - x^2}{x(x-3)(x+3)} = \\ &= \frac{x}{x-3} - \frac{x(x+3)}{2x+3} \cdot \frac{6x+9}{x(x-3)(x+3)} = \frac{x}{x-3} - \frac{3}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} = 1. \end{aligned}$$

66. a) Với điều kiện  $x \neq 1, x \neq -1$  ta có :

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x-1} \cdot \left( \frac{x^3}{2x+2} + 1 \right) - \frac{8x+7}{2x^2-2} &= \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{x^3+2x+2}{2(x+1)} - \frac{8x+7}{2(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{x^4+2x^3+2x^2+6x+4-8x-7}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x^4+2x^3+2x^2-2x-3}{2(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{x^4-x^2+2x^3-2x+3x^2-3}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x^2(x^2-1)+2x(x^2-1)+3(x^2-1)}{2(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{(x+1)(x-1)(x^2+2x+3)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+2x+3}{2}. \end{aligned}$$

Vì  $x^2+2x+3 = x^2+2x+1+2 = (x+1)^2+2 \geq 2$  với mọi giá trị của  $x$  nên giá trị của biểu thức đã cho luôn dương với mọi giá trị của  $x$  khác  $\pm 1$ .

b) Với điều kiện  $x \neq 0, x \neq -3$  ta có :

$$\begin{aligned} \frac{1-x^2}{x} \cdot \left( \frac{x^2}{x+3} - 1 \right) + \frac{3x^2-14x+3}{x^2+3x} &= \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{x^2-x-3}{x+3} + \frac{3x^2-14x+3}{x(x+3)} = \\ &= \frac{-x^4+x^3+4x^2-x-3+3x^2-14x+3}{x(x+3)} = \frac{-x^4+x^3+7x^2-15x}{x(x+3)} = \\ &= -\frac{x(x^3-x^2-7x+15)}{x(x+3)} = -\frac{x^3+3x^2-4x^2-12x+5x+15}{x+3} = \\ &= \frac{-(x+3)(x^2-4x+5)}{x+3} = -(x^2-4x+5). \end{aligned}$$

Vì  $x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1 > 0$  với mọi giá trị của  $x$  nên giá trị của biểu thức luôn luôn âm với mọi giá trị khác 0 và khác  $-3$  của  $x$ .

67. a) Với điều kiện  $x \neq 0, x \neq 2$  ta có :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x-2} \cdot \left( \frac{x^2+4}{x} - 4 \right) + 3 &= \frac{x^2}{x-2} \cdot \frac{x^2+4-4x}{x} + 3 = \frac{x^2(x-2)^2}{x(x-2)} + 3 \\ &= x(x-2) + 3 = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x-1)^2 + 2. \end{aligned}$$

Ta có  $(x-1)^2 + 2 \geq 2$  với mọi giá trị của  $x$  và có giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi  $x = 1$ . Vì  $x = 1$  thoả mãn điều kiện nên biểu thức đã cho có giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi  $x = 1$ .

b) Với điều kiện  $x \neq -2, x \neq 0$ , ta có :

$$\begin{aligned} \frac{(x+2)^2}{x} \cdot \left( 1 - \frac{x^2}{x+2} \right) - \frac{x^2+6x+4}{x} &= \frac{(x+2)^2}{x} \cdot \frac{x+2-x^2}{x+2} - \frac{x^2+6x+4}{x} \\ &= \frac{(x+2)(-x^2+x+2)}{x} - \frac{x^2+6x+4}{x} \\ &= \frac{-x^3 - x^2 + 4x + 4 - x^2 - 6x - 4}{x} \\ &= \frac{-x^3 - 2x^2 - 2x}{x} = -(x^2 + 2x + 2). \end{aligned}$$

Vì  $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1$  nên biểu thức có giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi  $x = -1$ .

Vì  $x = -1$  thoả mãn điều kiện nên biểu thức đã cho có giá trị lớn nhất bằng  $-1$  khi  $x = -1$ .

### Bài tập bổ sung

II.1. Giải :  $P = \left[ \left( \frac{x-y}{2y-x} - \frac{x^2+y^2+y-2}{(x+y)(x-2y)} \right) : \frac{(2x^2+y+2)(2x^2+y-2)}{(x+y)(x+1)} \right]$

$$: \frac{x+1}{2x^2+y+2}$$

$$= \left( \frac{(x-y)(x+y) + x^2 + y^2 + y - 2}{(x+y)(2y-x)} \cdot \frac{(x+y)(x+1)}{(2x^2+y+2)(2x^2+y-2)} \right) \cdot \frac{2x^2+y+2}{x+1}$$

$$= \left( \frac{2x^2+y-2}{2y-x} \cdot \frac{x+1}{2x^2+y-2} \right) \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2y-x}.$$

Tại  $x = -1,76$  và  $y = \frac{3}{25}$  thì giá trị của  $Q$  là  $\frac{1}{2}$ .

**II.2. Giải :** Ta có  $(a-b)(c^2 + bc - a^2 - ab) = (a-b)[(c^2 - a^2) + (bc - ab)]$   
 $= (a-b)(c-a)(a+b+c).$

Tương tự:  $(b-c)(a^2 + ac - b^2 - bc) = (b-c)(a-b)(a+b+c),$

$(c-a)(b^2 + ab - c^2 - ac) = (c-a)(b-c)(a+b+c).$

$MTC = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$

Kí hiệu biểu thức đã cho bởi  $Q$ , ta có :

$$Q = \frac{c-a+a-b+b-c}{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)} = 0.$$



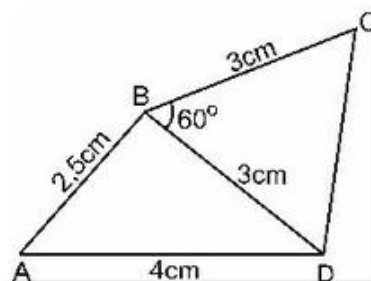
# PHẦN HÌNH HỌC

## Chương I TỨ GIÁC

### ĐỀ BÀI

#### §1. Tứ giác

- Tính tổng các góc ngoài của tứ giác (tại mỗi đỉnh của tứ giác chỉ chọn một góc ngoài).
- Tứ giác ABCD có  $AB = BC$ ,  $CD = DA$ .
  - Chứng minh rằng BD là đường trung trực của AC.
  - Cho biết  $\widehat{B} = 100^\circ$ ,  $\widehat{D} = 70^\circ$ , tính  $\widehat{A}$  và  $\widehat{C}$ .
- Vẽ lại tứ giác ABCD ở hình 1 vào vở bằng cách vẽ hai tam giác.
- Tính các góc của tứ giác ABCD, biết rằng :  
 $\widehat{A} : \widehat{B} : \widehat{C} : \widehat{D} = 1 : 2 : 3 : 4$ .
- Tứ giác ABCD có  $\widehat{A} = 65^\circ$ ,  $\widehat{B} = 117^\circ$ ,  $\widehat{C} = 71^\circ$ . Tính số đo góc ngoài tại đỉnh D.
- Chứng minh rằng các góc của một tứ giác không thể đều là góc nhọn, không thể đều là góc tù.
- Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng tổng hai góc ngoài tại các đỉnh A và C bằng tổng hai góc trong tại các đỉnh B và D.
- Tứ giác ABCD có  $\widehat{A} = 110^\circ$ ,  $\widehat{B} = 100^\circ$ . Các tia phân giác của các góc C và D cắt nhau ở E. Các đường phân giác của các góc ngoài tại các đỉnh C và D cắt nhau ở F. Tính  $\widehat{CED}$ ,  $\widehat{EFD}$ .
- Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai đường chéo lớn hơn tổng hai cạnh đối.
- 10\*. Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tứ giác ấy.



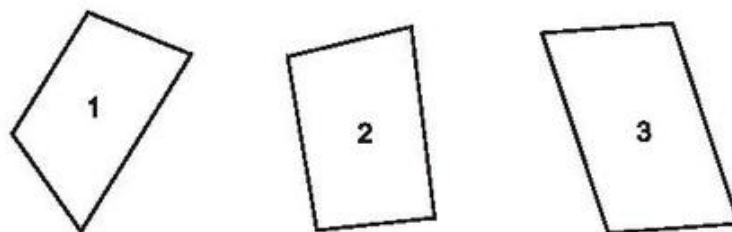
Hình 1

## Bài tập bổ sung

- 1.1. Tứ giác ABCD có  $\hat{B} = \hat{A} + 10^\circ$ ,  $\hat{C} = \hat{B} + 10^\circ$ ,  $\hat{D} = \hat{C} + 10^\circ$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng ?  
(A)  $\hat{A} = 65^\circ$  ;      (B)  $\hat{B} = 85^\circ$  ;      (C)  $\hat{C} = 100^\circ$  ;      (D)  $\hat{D} = 90^\circ$ .
- 1.2. Tứ giác ABCD có  $\hat{C} = 60^\circ$ ,  $\hat{D} = 80^\circ$ ,  $\hat{A} - \hat{B} = 10^\circ$ . Tính số đo các góc A và B.
- 1.3. Tứ giác ABCD có chu vi 66cm. Tính độ dài AC, biết chu vi tam giác ABC bằng 56cm, chu vi tam giác ACD bằng 60cm.

## §2. Hình thang

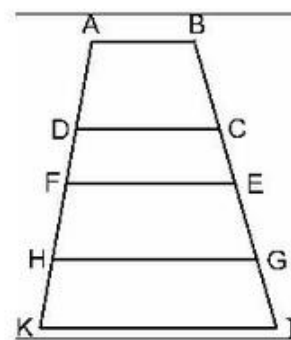
11. Tính các góc của hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ), biết rằng  $\hat{A} = 3\hat{D}$ ,  $\hat{B} - \hat{C} = 30^\circ$ .
12. Tứ giác ABCD có  $BC = CD$  và DB là tia phân giác của góc D. Chứng minh rằng ABCD là hình thang.
13. Dùng thước và êke kiểm tra xem trong các tứ giác trên hình 2 :  
a) Tứ giác nào chỉ có một cặp cạnh song song ;  
b) Tứ giác nào có hai cặp cạnh song song ;  
c) Tứ giác nào là hình thang.



Hình 2

14. Tính các góc B và D của hình thang ABCD, biết rằng  $\hat{A} = 60^\circ$ ,  $\hat{C} = 130^\circ$ .
15. Chứng minh rằng trong hình thang có nhiều nhất là hai góc tù, có nhiều nhất là hai góc nhọn.
16. Chứng minh rằng trong hình thang các tia phân giác của hai góc kề một cạnh bên vuông góc với nhau.
17. Cho tam giác ABC. Các tia phân giác của các góc B và C cắt nhau ở I. Qua I kẻ đường thẳng song song với BC, cắt các cạnh AB và AC ở D và E.

- a) Tìm các hình thang trong hình vẽ.  
 b) Chứng minh rằng hình thang BDEC có một cạnh đáy bằng tổng hai cạnh bên.
18. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Ở phía ngoài tam giác ABC, vẽ tam giác BCD vuông cân tại B. Tứ giác ABDC là hình gì? Vì sao?
19. Hình thang vuông ABCD có  $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ ,  $AB = AD = 2\text{cm}$ ,  $DC = 4\text{cm}$ . Tính các góc của hình thang.
20. Chứng minh rằng tổng hai cạnh bên của hình thang lớn hơn hiệu hai đáy.
21. Trên hình 3 có bao nhiêu hình thang?



Hình 3

### Bài tập bổ sung

- 2.1. Hình thang ABCD ( $BC \parallel AD$ ) có  $\widehat{C} = 3\widehat{D}$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng?  
 (A)  $\widehat{A} = 45^\circ$ ;      (B)  $\widehat{B} = 45^\circ$ ;      (C)  $\widehat{D} = 45^\circ$ ;      (D)  $\widehat{D} = 60^\circ$ .
- 2.2. Hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ) có  $\widehat{A} - \widehat{D} = 40^\circ$ ,  $\widehat{A} = 2\widehat{C}$ . Tính các góc của hình thang.
- 2.3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A,  $BC = 2\text{cm}$ . Ở phía ngoài tam giác ABC, vẽ tam giác ACE vuông cân tại E.  
 a) Chứng minh rằng AECEB là hình thang vuông.  
 b) Tính các góc và các cạnh của hình thang AECEB.

### §3. Hình thang cân

22. Hình thang cân ABCD có  $AB \parallel CD$ ,  $AB < CD$ . Kẻ các đường cao AH, BK. Chứng minh rằng  $DH = CK$ .
23. Hình thang cân ABCD có  $AB \parallel CD$ , O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng  $OA = OB$ ,  $OC = OD$ .

24. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các cạnh bên AB, AC lấy các điểm M, N sao cho  $BM = CN$ .
- a) Tứ giác BMNC là hình gì ? Vì sao ?
- b) Tính các góc của tứ giác BMNC biết rằng  $\widehat{A} = 40^\circ$ .
25. Cho tam giác ABC cân tại A, các đường phân giác BE, CF. Chứng minh rằng BFEC là hình thang cân có đáy nhỏ bằng cạnh bên.
26. Chứng minh rằng hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.
27. Tính các góc của hình thang cân, biết một góc bằng  $50^\circ$ .
28. Hình thang cân ABCD có đáy nhỏ AB bằng cạnh bên AD. Chứng minh rằng CA là tia phân giác của góc C.
29. Hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại O. Biết rằng  $OA = OC$ ,  $OB = OD$ . Tứ giác ACBD là hình gì ? Vì sao ?
30. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D trên cạnh AB, điểm E trên cạnh AC sao cho  $AD = AE$ .
- a) Tứ giác BDEC là hình gì ? Vì sao ?
- b) Các điểm D, E ở vị trí nào thì  $BD = DE = EC$  ?
31. Hình thang cân ABCD có O là giao điểm của hai đường thẳng chứa cạnh bên AD, BC và E là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng OE là đường trung trực của hai đáy.
32. a) Hình thang cân ABCD có đáy nhỏ  $AB = b$ , đáy lớn  $CD = a$ , đường cao AH. Chứng minh rằng  $HD = \frac{a - b}{2}$ ,  $HC = \frac{a + b}{2}$  (a và b có cùng đơn vị đo).
- b) Tính đường cao của hình thang cân có hai đáy 10cm, 26cm và cạnh bên 17cm.
33. Hình thang cân ABCD có đường chéo DB vuông góc với cạnh bên BC, DB là tia phân giác của góc D. Tính chu vi của hình thang, biết  $BC = 3\text{cm}$ .

### Bài tập bổ sung

- 3.1. Hình thang cân ABCD ( $AB \parallel CD$ ) có  $\widehat{A} = 70^\circ$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng ?
- (A)  $\widehat{C} = 110^\circ$  ;      (B)  $\widehat{B} = 110^\circ$  ;      (C)  $\widehat{C} = 70^\circ$  ;      (D)  $\widehat{D} = 70^\circ$ .

- 3.2. Hình thang cân ABCD ( $AB \parallel CD$ ) có hai đường chéo cắt nhau tại I, hai đường thẳng chứa các cạnh bên cắt nhau ở K. Chứng minh rằng KI là đường trung trực của hai đáy.
- 3.3. Hình thang cân ABCD ( $AB \parallel CD$ ) có  $\widehat{C} = 60^\circ$ , DB là tia phân giác của góc D. Tính các cạnh của hình thang, biết chu vi hình thang bằng 20cm.

#### §4. Đường trung bình của tam giác, của hình thang

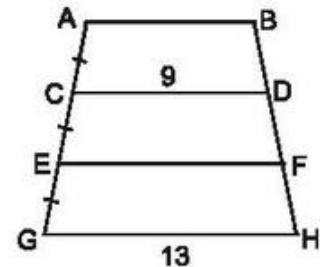
34. Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh AC sao cho  $AD = \frac{1}{2}DC$ . Gọi M là trung điểm của BC, I là giao điểm của BD và AM. Chứng minh rằng  $AI = IM$ .
35. Hình thang ABCD có đáy AB, CD. Gọi E, F, I theo thứ tự là trung điểm của AD, BC, AC. Chứng minh rằng ba điểm E, I, F thẳng hàng.
36. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, I theo thứ tự là trung điểm của AD, BC, AC. Chứng minh rằng :
- a)  $EI \parallel CD, IF \parallel AB$  ;
- b)  $EF \leq \frac{AB + CD}{2}$ .
37. Cho hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ), M là trung điểm của AD, N là trung điểm của BC. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của MN với BD, AC. Cho biết  $AB = 6\text{cm}, CD = 14\text{cm}$ . Tính các độ dài MI, IK, KN.
38. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD và CE cắt nhau ở G. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của GB, GC. Chứng minh rằng  $DE \parallel IK, DE = IK$ .
39. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi D là trung điểm của AM, E là giao điểm của BD và AC. Chứng minh rằng  $AE = \frac{1}{2}EC$ .
40. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD, CE. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BE, CD. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của MN với BD, CE. Chứng minh rằng  $MI = IK = KN$ .
41. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm của hai đường chéo và đi qua trung điểm của cạnh bên thứ hai.
42. Chứng minh rằng trong hình thang mà hai đáy không bằng nhau, đoạn thẳng nối trung điểm của hai đường chéo bằng nửa hiệu hai đáy.

43. Hình thang ABCD có  $AB \parallel CD$ ,  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$ . Các đường phân giác của các góc ngoài đỉnh A và D cắt nhau tại M, các đường phân giác của các góc ngoài đỉnh B và C cắt nhau tại N.
- a) Chứng minh rằng  $MN \parallel CD$ .
- b) Tính độ dài MN theo a, b, c, d (a, b, c, d có cùng đơn vị đo).
44. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi O là trung điểm của AM. Qua O kẻ đường thẳng d cắt các cạnh AB và AC. Gọi  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  là các đường vuông góc kẻ từ A, B, C đến đường thẳng d. Chứng minh rằng :

$$AA' = \frac{BB' + CC'}{2}.$$

### Bài tập bổ sung

- 4.1. Trên hình bs.1, ta có  $AB \parallel CD \parallel EF \parallel GH$  và  $AC = CE = EG$ . Biết  $CD = 9$ ,  $GH = 13$ . Các độ dài AB và EF bằng :
- (A) 8 và 10 ;            (B) 6 và 12 ;  
 (C) 7 và 11 ;            (D) 7 và 12.



Hình bs.1

- Hãy chọn phương án đúng.
- 4.2. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B có khoảng cách đến đường thẳng d theo thứ tự là 20cm và 6cm. Gọi C là trung điểm của AB. Tính khoảng cách từ C đến đường thẳng d.
- 4.3. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho  $BD = AB$ . Gọi K là giao điểm của DM và AC. Chứng minh rằng  $AK = 2KC$ .

### §5. Dựng hình bằng thước và compa. Dựng hình thang

45. Dựng tam giác ABC vuông tại A, biết cạnh huyền  $BC = 5\text{cm}$  và  $\widehat{B} = 35^\circ$ .
46. Dựng tam giác ABC vuông tại A, biết cạnh huyền  $BC = 4,5\text{cm}$  và cạnh góc vuông  $AC = 2\text{cm}$ .
47. Dựng góc  $30^\circ$  bằng thước và compa.
48. Dựng hình thang cân ABCD ( $AB \parallel CD$ ), biết  $CD = 3\text{cm}$ ,  $AC = 4\text{cm}$ ,  $\widehat{D} = 70^\circ$ .



49. Dựng hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ), biết  $\hat{D} = 90^\circ$ ,  $AD = 2\text{cm}$ ,  $CD = 4\text{cm}$ ,  $BC = 3\text{cm}$ .
50. Dựng tam giác ABC cân tại A, biết  $BC = 3\text{cm}$ , đường cao  $BH = 2,5\text{cm}$ .
51. Dựng tam giác ABC, biết  $\hat{B} = 40^\circ$ ,  $BC = 4\text{cm}$ ,  $AC = 3\text{cm}$ .
52. Dựng hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ), biết  $AD = 2\text{cm}$ ,  $CD = 4\text{cm}$ ,  $BC = 2,5\text{cm}$ ,  $AC = 3,5\text{cm}$ .
53. Dựng hình thang cân ABCD ( $AB \parallel CD$ ), biết  $AD = 2\text{cm}$ ,  $CD = 4\text{cm}$ ,  $AC = 3,5\text{cm}$ .
54. Dựng hình thang cân ABCD ( $AB \parallel CD$ ), biết hai đáy  $AB = 2\text{cm}$ ,  $CD = 4\text{cm}$ , đường cao  $AH = 2\text{cm}$ .
- 55\*. Dựng hình thang ABCD, biết hai đáy  $AB = 2\text{cm}$ ,  $CD = 4\text{cm}$ ,  $\hat{C} = 50^\circ$ ,  $\hat{D} = 70^\circ$ .
- 56\*. Dựng hình thang ABCD, biết hai đáy  $AB = 1\text{cm}$ ,  $CD = 4\text{cm}$ , hai cạnh bên  $AD = 2\text{cm}$ ,  $BC = 3\text{cm}$ .
- 57\*. Dựng hình thang cân ABCD, biết hai đáy  $AB = 1\text{cm}$ ,  $CD = 3\text{cm}$ , đường chéo  $BD = 3\text{cm}$ .
58. Dựng tứ giác ABCD, biết  $AB = 2\text{cm}$ ,  $AD = 3\text{cm}$ ,  $\hat{A} = 80^\circ$ ,  $\hat{B} = 120^\circ$ ,  $\hat{C} = 100^\circ$ .
59. Dựng góc  $75^\circ$  bằng thước và compa.

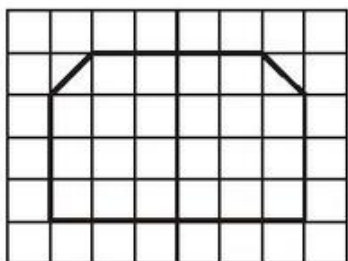
### Bài tập bổ sung

- 5.1. Dựng hình thang cân ABCD ( $AB \parallel CD$ ) biết  $BC = 3\text{cm}$ ,  $AB = 2\text{cm}$ , đường cao bằng  $2,5\text{cm}$ .
- 5.2\*. Dựng tam giác ABC biết  $\hat{B} = 80^\circ$ ,  $BC = 3\text{cm}$ ,  $AB + AC = 5\text{cm}$ .

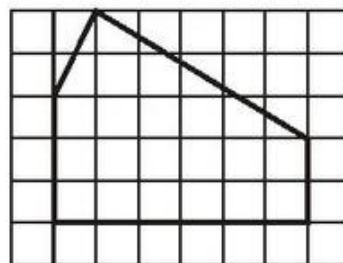
### §6. Đối xứng trục

60. Cho tam giác ABC có  $\hat{A} = 70^\circ$ , điểm M thuộc cạnh BC. Vẽ điểm D đối xứng với M qua AB, vẽ điểm E đối xứng với M qua AC.
- a) Chứng minh rằng  $AD = AE$ .
- b) Tính số đo góc DAE.

61. Cho tam giác nhọn ABC có  $\widehat{A} = 60^\circ$ , trực tâm H. Gọi M là điểm đối xứng với H qua BC.
- Chứng minh  $\triangle BHC = \triangle BMC$ .
  - Tính  $\widehat{BMC}$ .
62. Cho hình thang vuông ABCD ( $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ ). Gọi H là điểm đối xứng với B qua AD, I là giao điểm của CH và AD. Chứng minh rằng  $\widehat{AIB} = \widehat{DIC}$ .
63. Cho hai điểm A, B thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng xy (AB không vuông góc với xy). Gọi A' là điểm đối xứng với A qua xy, C là giao điểm của A'B và xy. Gọi M là điểm bất kì khác C thuộc đường thẳng xy. Chứng minh rằng  $AC + CB < AM + MB$ .
64. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Trên cạnh AB lấy điểm I, trên cạnh AC lấy điểm K sao cho  $AI = AK$ . Chứng minh rằng điểm I đối xứng với điểm K qua AH.
65. Tứ giác ABCD có  $AB = BC, CD = DA$  (hình cái điều). Chứng minh rằng điểm A đối xứng với điểm C qua đường thẳng BD.
66. Tam giác ABC có  $AB < AC$ . Gọi d là đường trung trực của BC. Vẽ điểm K đối xứng với điểm A qua đường thẳng d.
- Tìm các đoạn thẳng đối xứng với đoạn thẳng AB qua d, đối xứng với đoạn thẳng AC qua d.
  - Tứ giác AKCB là hình gì? Vì sao?
67. Cho tam giác ABC. Điểm M nằm trên đường phân giác của góc ngoài đỉnh C (M khác C). Chứng minh rằng  $AC + CB < AM + MB$ .
68. Trong các hình nét đậm vẽ trên giấy kẻ ô vuông ở hình 4, hình 5, hình nào có trục đối xứng?



Hình 4



Hình 5



69. Vẽ hình đối xứng qua đường thẳng  $d$  của hình đã vẽ (h.6).



70. Điền dấu "×" vào ô thích hợp :

Hình 6

Câu khẳng định	Đúng	Sai
a) Tam giác có một trục đối xứng là tam giác cân	...	...
b) Tứ giác có một trục đối xứng là hình thang cân	...	...

71. Chứng minh rằng giao điểm hai đường chéo của hình thang cân nằm trên trục đối xứng của hình thang cân.
- 72\*. Cho góc nhọn  $xOy$ , điểm  $A$  nằm trong góc đó. Dựng điểm  $B$  thuộc tia  $Ox$ , điểm  $C$  thuộc tia  $Oy$  sao cho tam giác  $ABC$  có chu vi nhỏ nhất.

### Bài tập bổ sung

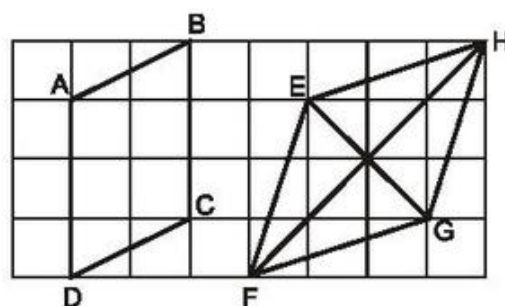
- 6.1. Hãy nối mỗi ô của cột bên trái với một ô của cột bên phải để được khẳng định đúng.

1) Trục đối xứng của tam giác $ABC$ ( $AB = BC$ ) là	A) đường trung trực của $AB$ .
2) Trục đối xứng của hình thang cân $ABCD$ ( $AB \parallel CD$ ) là	B) đường trung trực của $BC$ .
	C) đường trung trực của $AC$ .

- 6.2. Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ . Trên tia đối của tia  $AB$  lấy điểm  $D$ , trên tia đối của tia  $AC$  lấy điểm  $E$  sao cho  $AD = AE$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh rằng  $D$  đối xứng với  $E$  qua  $AM$ .

**§7. Hình bình hành**

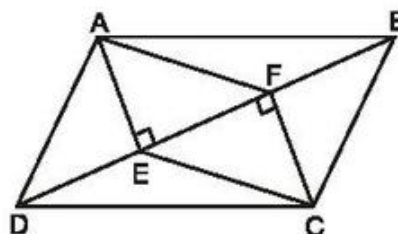
73. Các tứ giác ABCD, EFGH vẽ trên giấy kẻ ô vuông ở hình 7 có là hình bình hành hay không ?



Hình 7

74. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là trung điểm của AB, F là trung điểm của CD. Chứng minh rằng  $DE = BF$ .
75. Cho hình bình hành ABCD. Tia phân giác của góc A cắt CD ở M. Tia phân giác của góc C cắt AB ở N. Chứng minh rằng AMCN là hình bình hành.

76. Trên hình 8, cho ABCD là hình bình hành. Chứng minh rằng AECF là hình bình hành.



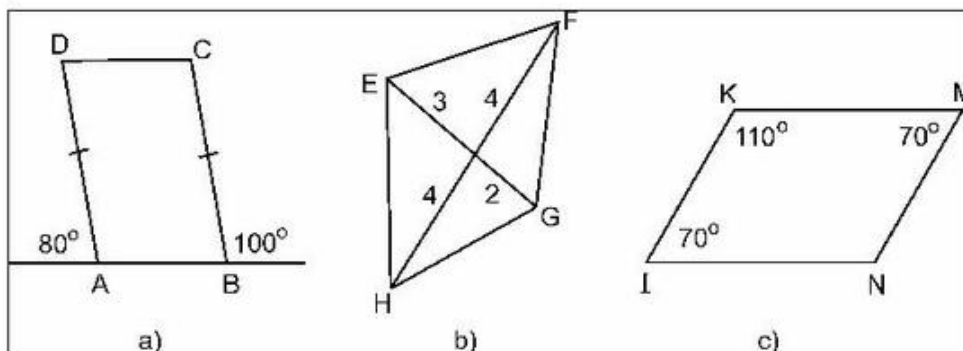
Hình 8

77. Tứ giác ABCD có E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tứ giác EFGH là hình gì ? Vì sao ?
78. Cho hình bình hành ABCD. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của CD, AB. Đường chéo BD cắt AI, CK theo thứ tự ở E, F. Chứng minh rằng  $DE = EF = FB$ .

79. Tính các góc của hình bình hành ABCD, biết :

- a)  $\widehat{A} = 110^\circ$  ;  
 b)  $\widehat{A} - \widehat{B} = 20^\circ$  .

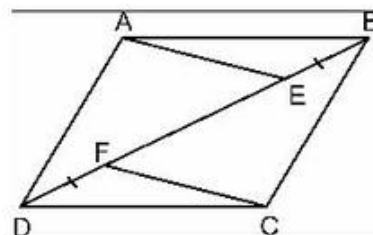
80. Trong các tứ giác trên hình 9, tứ giác nào là hình bình hành ?



Hình 9

81. Chu vi hình bình hành ABCD bằng 10cm, chu vi tam giác ABD bằng 9cm. Tính độ dài BD.

82. Trên hình 10, cho ABCD là hình bình hành. Chứng minh rằng  $AE \parallel CF$ .



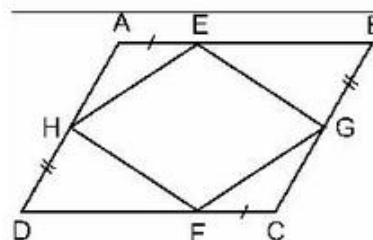
Hình 10

83. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE. Chứng minh rằng :

- a) EMFN là hình bình hành.
- b) Các đường thẳng AC, EF, MN đồng quy.

84. Trên hình 11, cho ABCD là hình bình hành. Chứng minh rằng :

- a) EGFH là hình bình hành.
- b) Các đường thẳng AC, BD, EF, GH đồng quy.



Hình 11

85\*. Cho hình bình hành ABCD. Qua C kẻ đường thẳng xy chỉ có một điểm chung C với hình bình hành. Gọi AA', BB', DD' là các đường vuông góc kẻ từ A, B, D đến đường thẳng xy. Chứng minh rằng  $AA' = BB' + DD'$ .

86\*. Cho hình bình hành ABCD và đường thẳng xy không có điểm chung với hình bình hành. Gọi AA', BB', CC', DD' là các đường vuông góc kẻ từ A, B, C, D đến đường thẳng xy. Tìm mối liên hệ độ dài giữa AA', BB', CC', DD'.

87\*. Cho hình bình hành ABCD có  $\angle A = \alpha > 90^\circ$ . Ở phía ngoài hình bình hành, vẽ các tam giác đều ADF, ABE.

- a) Tính  $\angle EAF$ .
- b) Chứng minh rằng tam giác CEF là tam giác đều.

88\*. Cho tam giác ABC. Ở phía ngoài tam giác, vẽ các tam giác vuông cân tại A là ABD, ACE. Vẽ hình bình hành ADIE. Chứng minh rằng :

- a)  $IA = BC$  ;
- b)  $IA \perp BC$ .

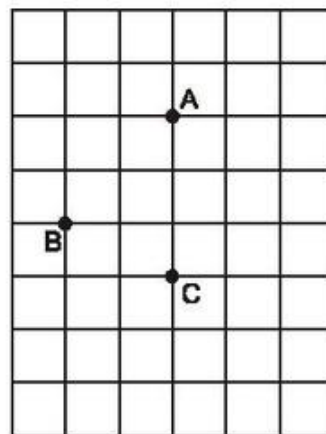
89. Dựng hình bình hành ABCD, biết :

a)  $AB = 2\text{cm}$ ,  $AD = 3\text{cm}$ ,  $\widehat{A} = 110^\circ$ .

b)  $AC = 4\text{cm}$ ,  $BD = 5\text{cm}$ ,  $\widehat{BOC} = 50^\circ$  (O là giao điểm của hai đường chéo).

90. Cho ba điểm A, B, C trên giấy kẻ ô vuông (h.12). Hãy vẽ điểm thứ tư M sao cho A, B, C, M là bốn đỉnh của một hình bình hành.

91\*. Cho tam giác ABC. Dựng đường thẳng song song với BC, cắt cạnh AB ở E, cắt cạnh AC ở F sao cho  $BE = AF$ .



Hình 12

### Bài tập bổ sung

7.1. Tứ giác ABCD là hình bình hành nếu :

(A)  $AB = CD$  ;

(B)  $AD = BC$  ;

(C)  $AB \parallel CD$  và  $AD = BC$  ;

(D)  $AB = CD$  và  $AD = BC$ .

Hãy chọn phương án đúng.

7.2. Cho hình bình hành ABCD, các đường chéo cắt nhau tại O. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của OD, OB. Gọi K là giao điểm của AE và CD. Chứng minh rằng :

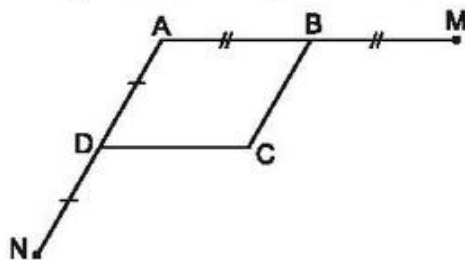
a) AE song song với CF.

b)  $DK = \frac{1}{2}KC$ .

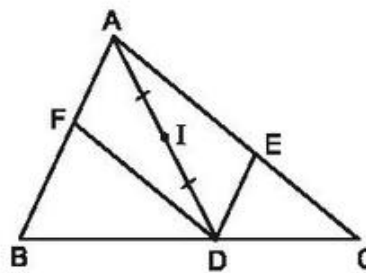
7.3. Cho hình bình hành ABCD. Lấy điểm E trên cạnh AB, điểm F trên cạnh CD sao cho  $AE = CF$ . Chứng minh rằng ba đường thẳng AC, BD, EF đồng quy.

### §8. Đối xứng tâm

92. Cho hình 13 trong đó ABCD là hình bình hành. Chứng minh rằng điểm M đối xứng với điểm N qua điểm C.



Hình 13

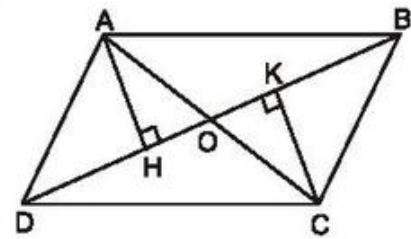


Hình 14



93. Cho hình 14 trong đó  $DE \parallel AB$ ,  $DF \parallel AC$ . Chứng minh rằng điểm E đối xứng với điểm F qua điểm I.
94. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BM, CN. Gọi D là điểm đối xứng với B qua M, gọi E là điểm đối xứng với C qua N. Chứng minh rằng điểm D đối xứng với điểm E qua điểm A.
95. Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm D thuộc cạnh BC. Gọi E là điểm đối xứng với D qua AB, gọi F là điểm đối xứng với D qua AC. Chứng minh rằng các điểm E và F đối xứng với nhau qua điểm A.

96. Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Một đường thẳng đi qua O cắt hai cạnh đối AD, BC ở E, F. Chứng minh rằng các điểm E và F đối xứng với nhau qua điểm O.



Hình 15

97. Cho hình 15 trong đó ABCD là hình bình hành. Chứng minh rằng các điểm H và K đối xứng với nhau qua điểm O.
98. Cho tam giác ABC, D là trung điểm của AB, E là trung điểm của AC. Gọi O là một điểm bất kì nằm trong tam giác ABC. Vẽ điểm M đối xứng với O qua D, vẽ điểm N đối xứng với O qua E. Chứng minh rằng MNCB là hình bình hành.
99. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau ở G. Gọi H là điểm đối xứng với G qua D, I là điểm đối xứng với G qua E, K là điểm đối xứng với G qua F. Tìm các điểm đối xứng với A, với B, với C qua G.
100. Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Qua O, vẽ đường thẳng cắt hai cạnh AB, CD ở E, F. Qua O vẽ đường thẳng cắt hai cạnh AD, BC ở G, H. Chứng minh rằng EGFH là hình bình hành.
101. Cho góc xOy, điểm A nằm trong góc đó. Vẽ điểm B đối xứng với A qua Ox, vẽ điểm C đối xứng với A qua Oy.
- Chứng minh rằng  $OB = OC$ .
  - Tính số đo góc xOy để B đối xứng với C qua O.
102. Cho tam giác ABC có trực tâm H. Gọi M là trung điểm của BC, K là điểm đối xứng với H qua M. Tính số đo các góc ABK, ACK.
103. Trong các hình sau, hình nào có tâm đối xứng? Với các hình đó, hãy chỉ rõ tâm đối xứng của hình.
- Đoạn thẳng AB.
  - Tam giác đều ABC.
  - Đường tròn tâm O.

**104.** Cho góc  $xOy$  và điểm  $A$  nằm trong góc đó.

a) Vẽ điểm  $B$  đối xứng với  $O$  qua  $A$ . Qua  $B$  kẻ đường thẳng song song với  $Ox$ , cắt  $Oy$  ở  $C$ . Gọi  $D$  là giao điểm của  $CA$  và  $Ox$ . Chứng minh rằng các điểm  $C$  và  $D$  đối xứng với nhau qua điểm  $A$ .

b) Từ đó suy ra cách dựng đường thẳng đi qua  $A$ , cắt  $Ox$ ,  $Oy$  ở  $D$ ,  $C$  sao cho  $A$  là trung điểm của  $CD$ .

**105.** Cho tam giác  $ABC$ , điểm  $M$  nằm trên cạnh  $BC$ . Gọi  $O$  là trung điểm của  $AM$ . Dựng điểm  $E$  thuộc cạnh  $AB$ , điểm  $F$  thuộc cạnh  $AC$  sao cho  $E$  đối xứng với  $F$  qua  $O$ .

### Bài tập bổ sung

**8.1.** Xét tính đúng – sai của mỗi khẳng định sau :

a) Trung điểm của một đoạn thẳng là tâm đối xứng của đoạn thẳng đó.

b) Giao điểm hai đường chéo của một hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó.

c) Trọng tâm của một tam giác là tâm đối xứng của tam giác đó.

d) Tâm của một đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

**8.2.** Cho tam giác  $ABC$ , đường trung tuyến  $AM$  và trọng tâm  $G$ . Gọi  $I$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $G$ .

Chứng minh rằng  $I$  là điểm đối xứng với  $G$  qua  $M$ .

### §9. Hình chữ nhật

**106.** Tính đường chéo  $d$  của một hình chữ nhật, biết độ dài các cạnh  $a = 3\text{cm}$ ,  $b = 5\text{cm}$  (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

**107.** Chứng minh rằng trong hình chữ nhật :

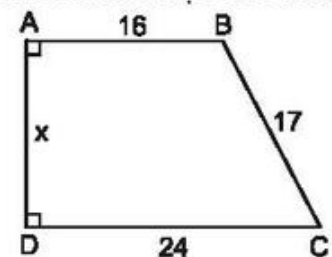
a) Giao điểm của hai đường chéo là tâm đối xứng của hình.

b) Hai đường thẳng đi qua trung điểm của hai cạnh đối là hai trục đối xứng của hình.

**108.** Tính độ dài đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của một tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng  $5\text{cm}$  và  $10\text{cm}$  (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

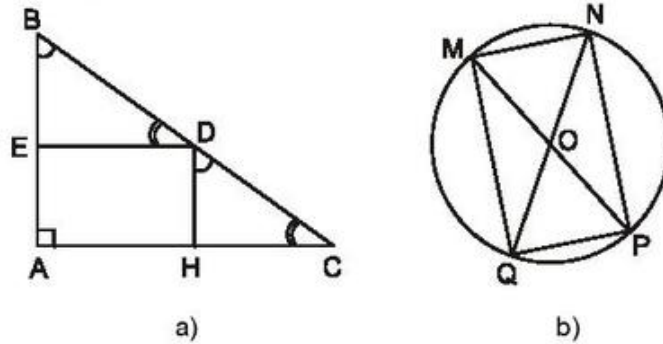
**109.** Tính  $x$  trên hình 16 (đơn vị đo :  $\text{cm}$ ).

**110.** Chứng minh rằng các tia phân giác các góc của một hình bình hành cắt nhau tạo thành một hình chữ nhật.



Hình 16

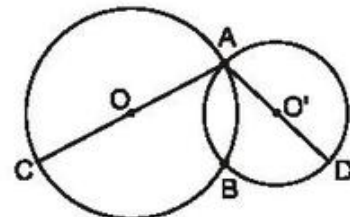
111. Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tứ giác EFGH là hình gì? Vì sao?
112. Tìm các hình chữ nhật trên hình 17 (trong hình 17b, O là tâm của đường tròn).



Hình 17

113. Các câu sau đúng hay sai?
- Hình chữ nhật là tứ giác có tất cả các góc bằng nhau.
  - Tứ giác có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.
  - Tứ giác có hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình chữ nhật.
114. Cho tam giác ABC vuông cân tại A,  $AC = 4\text{cm}$ , điểm M thuộc cạnh BC. Gọi D, E theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC.
- Tứ giác ADME là hình gì? Tính chu vi của tứ giác đó.
  - Điểm M ở vị trí nào trên cạnh BC thì đoạn thẳng DE có độ dài nhỏ nhất?
115. Cho tam giác ABC cân tại A, các đường trung tuyến BM, CN cắt nhau tại G. Gọi D là điểm đối xứng với G qua M, gọi E là điểm đối xứng với G qua N. Tứ giác BEDC là hình gì? Vì sao?

116. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BD. Biết  $HD = 2\text{cm}$ ,  $HB = 6\text{cm}$ . Tính các độ dài AD, AB (làm tròn đến hàng đơn vị).



Hình 18

117. Chứng minh rằng ba điểm C, B, D trên hình 18 thẳng hàng.
118. Tứ giác ABCD có  $AB \perp CD$ . Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của BC, BD, AD, AC. Chứng minh rằng  $EG = FH$ .
119. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Gọi D, E, M theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, BC. Chứng minh rằng tứ giác DEMH là hình thang cân.



- 120.** Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm D thuộc cạnh AC. Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của BD, BC, DC. Chứng minh rằng tứ giác AEFG là hình thang cân.
- 121\*.** Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BD, CE. Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ B, C đến đường thẳng DE. Chứng minh rằng  $EH = DK$ .  
*HD :* Vẽ điểm I là trung điểm của DE, điểm M là trung điểm của BC.
- 122\*.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC.  
 a) Chứng minh rằng  $AH = DE$ .  
 b) Gọi I là trung điểm của HB, K là trung điểm của HC. Chứng minh rằng  $DI // EK$ .
- 123\*.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, đường trung tuyến AM.  
 a) Chứng minh rằng  $\widehat{HAB} = \widehat{MAC}$ .  
 b) Gọi D, E theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC. Chứng minh rằng AM vuông góc với DE.

### Bài tập bổ sung

- 9.1.** Một hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng 4cm và 6cm. Độ dài đường chéo của hình chữ nhật đó bằng bao nhiêu xentimét ?  
 (A) 8cm ;      (B)  $\sqrt{52}$ cm ;      (C) 9cm ;      (D)  $\sqrt{42}$ cm.  
 Hãy chọn phương án đúng.
- 9.2.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Tính số đo góc IHK.
- 9.3.** Cho hình thang cân ABCD, đường cao AH. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh bên AD, BC. Chứng minh rằng EFCH là hình bình hành.

### §10. Đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước

- 124.** Cho đoạn thẳng AB. Kẻ tia Ax bất kì, lấy các điểm C, D, E sao cho  $AC = CD = DE$ . Qua C và D kẻ các đường thẳng song song với EB. Chứng minh rằng đoạn thẳng AB bị chia ra ba phần bằng nhau.
- 125.** Cho góc vuông xOy, điểm A trên tia Oy. Điểm B di chuyển trên tia Ox. Gọi C là điểm đối xứng với A qua B. Điểm C di chuyển trên đường nào ?



126. Cho tam giác ABC, điểm M di chuyển trên cạnh BC. Gọi I là trung điểm của AM. Điểm I di chuyển trên đường nào ?
127. Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm M thuộc cạnh BC. Gọi D, E theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC.
- a) So sánh các độ dài AM, DE.  
b) Tìm vị trí của điểm M trên cạnh BC để DE có độ dài nhỏ nhất.
128. Cho điểm A nằm ngoài đường thẳng d. Điểm M di chuyển trên đường thẳng d. Gọi B là điểm đối xứng với A qua M. Điểm B di chuyển trên đường nào ?
- 129\*. Cho đoạn thẳng AB, điểm M di chuyển trên đoạn thẳng ấy. Vẽ về một phía của AB các tam giác đều AMD, BME. Trung điểm I của DE di chuyển trên đường nào ?
130. Hình chữ nhật ABCD có cạnh AD bằng nửa đường chéo AC. Tính góc nhọn tạo bởi hai đường chéo.
131. Dựng hình chữ nhật ABCD, biết đường chéo  $AC = 4\text{cm}$ , góc tạo bởi hai đường chéo bằng  $100^\circ$ .

### Bài tập bổ sung

- 10.1. Tập hợp giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật ABCD có A và B cố định là
- (A) đường trung trực của AD ;                      (B) đường trung trực của AB ;  
(C) đường trung trực của BC ;                      (D) đường tròn (A ; AB).
- Hãy chọn phương án đúng.
- 10.2. Cho góc xOy cố định khác góc bẹt. Các điểm A và B theo thứ tự chuyển động trên các tia Ox và Oy sao cho  $OA = OB$ . Đường vuông góc với OA tại A và đường vuông góc với OB tại B cắt nhau ở M. Điểm M chuyển động trên đường nào ?
- 10.3. Xét các hình bình hành ABCD có cạnh AD cố định, cạnh  $AB = 2\text{cm}$ . Gọi I là giao điểm của AC và BD. Điểm I chuyển động trên đường nào ?

### §11. Hình thoi

132. Chứng minh rằng trung điểm bốn cạnh của một hình chữ nhật là đỉnh của một hình thoi.
133. Chứng minh rằng trung điểm các cạnh của một hình thoi là đỉnh của một hình chữ nhật.

- 134.** Chứng minh rằng trong hình thoi :
- Giao điểm của hai đường chéo là tâm đối xứng của hình thoi.
  - Hai đường chéo là hai trục đối xứng của hình thoi.
- 135.** Tứ giác ABCD có tọa độ các đỉnh như sau : A(0 ; 2), B(3 ; 0), C(0 ; -2), D(-3 ; 0). Tứ giác ABCD là hình gì ? Tính chu vi của tứ giác đó.
- 136.** a) Cho hình thoi ABCD. Kẻ hai đường cao AH, AK. Chứng minh rằng AH = AK.  
b) Hình bình hành ABCD có hai đường cao AH, AK bằng nhau. Chứng minh rằng ABCD là hình thoi.
- 137.** Hình thoi ABCD có  $\widehat{A} = 60^\circ$ . Kẻ hai đường cao BE, BF. Tam giác BEF là tam giác gì ? Vì sao ?
- 138.** Cho hình thoi ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ O đến AB, BC, CD, DA. Tứ giác EFGH là hình gì ? Vì sao ?
- 139.** Hình thoi ABCD có chu vi bằng 16cm, đường cao AH bằng 2cm. Tính các góc của hình thoi, biết rằng  $\widehat{A} > \widehat{B}$ .
- 140.** Hình thoi ABCD có  $\widehat{A} = 60^\circ$ . Trên cạnh AD lấy điểm M, trên cạnh DC lấy điểm N sao cho AM = DN. Tam giác BMN là tam giác gì ? Vì sao ?
- 141.** Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự trên các cạnh AB, AC sao cho BD = CE. Gọi M, N, I, K theo thứ tự là trung điểm của BE, CD, DE, BC. Chứng minh rằng IK vuông góc với MN.
- 142\*.** Cho hình bình hành ABCD, các đường chéo cắt nhau ở O. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là giao điểm của các đường phân giác của các tam giác AOB, BOC, COD, DOA. Chứng minh rằng EFGH là hình thoi.
- 143.** Dựng hình thoi ABCD, biết cạnh bằng 2cm, một đường chéo bằng 3cm.

### Bài tập bổ sung

- 11.1.** Cạnh của một hình thoi bằng 25, một đường chéo bằng 14. Đường chéo kia bằng :
- (A) 24 ;            (B) 48 ;            (C)  $\sqrt{429}$  ;            (D) Một đáp số khác.
- Hãy chọn phương án đúng.
- 11.2.** Cho hình thang cân ABCD (AB // CD). Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tứ giác EFGH là hình gì ?

**11.3.** Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh BC. Qua D kẻ đường thẳng song song với AC, cắt AB ở I. Qua D kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AC ở K.

a) Tứ giác AIDK là hình gì ?

b) Điểm D ở vị trí nào trên cạnh BC thì AIDK là hình thoi ?

## §12. Hình vuông

**144.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD. Gọi M, N theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D đến AB, AC. Chứng minh rằng tứ giác AMDN là hình vuông.

**145.** Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lấy theo thứ tự các điểm E, K, P, Q sao cho  $AE = BK = CP = DQ$ . Tứ giác EKPQ là hình gì ? Vì sao ?

**146.** Cho tam giác ABC, điểm I nằm giữa B và C.

Qua I vẽ đường thẳng song song với AB, cắt AC ở H.

Qua I vẽ đường thẳng song song với AC, cắt AB ở K.

a) Tứ giác AHİK là hình gì ?

b) Điểm I ở vị trí nào trên cạnh BC thì tứ giác AHİK là hình thoi ?

c) Tam giác ABC có điều kiện gì thì tứ giác AHİK là hình chữ nhật ?

**147.** Hình chữ nhật ABCD có  $AB = 2AD$ . Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi H là giao điểm của AQ và DP, gọi K là giao điểm của CP và BQ. Chứng minh rằng PHQK là hình vuông.

**148.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên cạnh BC lấy các điểm H, G sao cho  $BH = HG = GC$ . Qua H và G kẻ các đường vuông góc với BC, chúng cắt AB và AC theo thứ tự ở E và F. Tứ giác EFGH là hình gì ? Vì sao ?

**149.** Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AD lấy điểm F, trên cạnh DC lấy điểm E sao cho  $AF = DE$ . Chứng minh rằng  $AE = BF$  và  $AE \perp BF$ .

**150.** Cho một hình chữ nhật có hai cạnh kề không bằng nhau. Chứng minh rằng các tia phân giác của các góc của hình chữ nhật đó cắt nhau tạo thành một hình vuông.

**151.** Cho hình vuông ABCD. Gọi E là một điểm nằm giữa C và D. Tia phân giác của góc DAE cắt CD ở F. Kẻ  $FH \perp AE$  ( $H \in AE$ ), FH cắt BC ở G.

Tính số đo góc FAG.

- 152.** Cho hình vuông DEBC. Trên cạnh CD lấy điểm A, trên tia đối của tia DC lấy điểm K, trên tia đối của tia ED lấy điểm M sao cho  $CA = DK = EM$ . Vẽ hình vuông DKIH (H thuộc cạnh DE). Chứng minh rằng ABMI là hình vuông.
- 153\*.** Cho tam giác ABC. Vẽ ở ngoài tam giác các hình vuông ABDE, ACFH.
- Chứng minh rằng  $EC = BH$ ,  $EC \perp BH$ .
  - Gọi M, N theo thứ tự là tâm của các hình vuông ABDE, ACFH. Gọi I là trung điểm của BC. Tam giác MIN là tam giác gì? Vì sao?
- 154\*.** Cho hình vuông ABCD, điểm E thuộc cạnh CD. Tia phân giác của góc ABE cắt AD ở K. Chứng minh rằng  $AK + CE = BE$ .
- 155\*.** Cho hình vuông ABCD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, BC.
- Chứng minh rằng CE vuông góc với DF.
  - Gọi M là giao điểm của CE và DF. Chứng minh rằng  $AM = AD$ .
- HD.* Gọi K là trung điểm của CD. Chứng minh rằng  $KA \parallel CE$ .
- 156\*.** Cho hình vuông ABCD. Vẽ điểm E trong hình vuông sao cho  $\widehat{EDC} = \widehat{ECD} = 15^\circ$ .
- Vẽ điểm F trong hình vuông sao cho  $\widehat{FAD} = \widehat{FDA} = 15^\circ$ . Chứng minh rằng tam giác DEF là tam giác đều.
  - Chứng minh rằng tam giác ABE là tam giác đều.

### Bài tập bổ sung

- 12.1.** Hình vuông có chu vi bằng 8 thì đường chéo bằng :
- (A) 2 ;            (B)  $\sqrt{32}$  ;            (C)  $\sqrt{8}$  ;            (D)  $\sqrt{2}$ .
- Hãy chọn phương án đúng.
- 12.2.** Cho hình thoi ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Các tia phân giác của bốn góc vuông có đỉnh O cắt các cạnh AB, BC, CD, DA theo thứ tự ở E, F, G, H. Tứ giác EFGH là hình gì?
- 12.3.** Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh DC lấy điểm E, trên cạnh BC lấy điểm F sao cho  $DE = CF$ . Chứng minh rằng  $AE = DF$  và  $AE \perp DF$ .

### Bài tập ôn chương I

- 157.** Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Tìm điều kiện của tứ giác ABCD để EFGH là :
- Hình chữ nhật ;            b) Hình thoi ;            c) Hình vuông.

- 158.** Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm D là trung điểm của BC. Gọi M là điểm đối xứng với D qua AB, E là giao điểm của DM và AB. Gọi N là điểm đối xứng với D qua AC, F là giao điểm của DN và AC.
- Tứ giác AEDF là hình gì ? Vì sao ?
  - Các tứ giác ADBM, ADCN là hình gì ? Vì sao ?
  - Chứng minh rằng M đối xứng với N qua A.
  - Tam giác vuông ABC có điều kiện gì thì tứ giác AEDF là hình vuông ?
- 159.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với H qua AB, gọi E là điểm đối xứng với H qua AC.
- Chứng minh rằng D đối xứng với E qua A.
  - Tam giác DHE là tam giác gì ? Vì sao ?
  - Tứ giác BDEC là hình gì ? Vì sao ?
  - Chứng minh rằng  $BC = BD + CE$ .
- 160.** Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, DC, DB. Tìm điều kiện của tứ giác ABCD để EFGH là :
- Hình chữ nhật ;
  - Hình thoi ;
  - Hình vuông.
- 161.** Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD và CE cắt nhau ở G. Gọi H là trung điểm của GB, K là trung điểm của GC.
- Chứng minh rằng tứ giác DEHK là hình bình hành.
  - Tam giác ABC có điều kiện gì thì tứ giác DEHK là hình chữ nhật ?
  - Nếu các đường trung tuyến BD và CE vuông góc với nhau thì tứ giác DEHK là hình gì ?
- 162.** Cho hình bình hành ABCD có  $AB = 2AD$ . Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của AB và CD.
- Các tứ giác AEFD, AECF là hình gì ? Vì sao ?
  - Gọi M là giao điểm của AF và DE, gọi N là giao điểm của BF và CE. Chứng minh rằng tứ giác EMFN là hình chữ nhật.
  - Hình bình hành ABCD nói trên có thêm điều kiện gì thì EMFN là hình vuông ?
- 163.** Cho hình bình hành ABCD có E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD.
- Tứ giác DEBF là hình gì ? Vì sao ?
  - Chứng minh rằng các đường thẳng AC, BD, EF cùng cắt nhau tại một điểm.



c) Gọi giao điểm của AC với DE và BF theo thứ tự là M và N. Chứng minh rằng tứ giác EMFN là hình bình hành.

**164\*.** Cho đoạn thẳng  $AB = a$ . Gọi M là một điểm nằm giữa A và B. Vẽ về một phía của AB các hình vuông AMNP, BMLK có tâm theo thứ tự là C, D. Gọi I là trung điểm của CD.

a) Tính khoảng cách từ I đến AB.

b) Khi điểm M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì điểm I di chuyển trên đường nào ?

### Bài tập bổ sung

**I.1.** Điền vào chỗ trống :

a) Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là .....

b) Tứ giác có hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là .....

c) Tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường là .....

**I.2.** Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, AC.

a) Chứng minh rằng ADEF là hình thoi.

b) Tam giác ABC có thêm điều kiện gì thì ADEF là hình vuông ?

## LỜI GIẢI - CHỈ DẪN - ĐÁP SỐ

### §1. Tứ giác

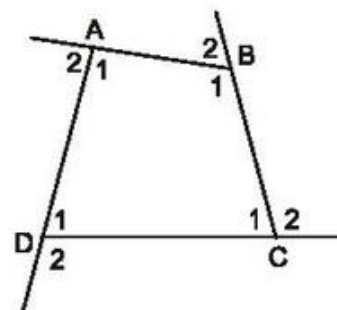
1. (h.19). Ta có  $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 = 360^\circ$ ,

cần tính  $\widehat{A}_2 + \widehat{B}_2 + \widehat{C}_2 + \widehat{D}_2$ .

$$\widehat{A}_2 + \widehat{B}_2 + \widehat{C}_2 + \widehat{D}_2 =$$

$$= (180^\circ - \widehat{A}_1) + (180^\circ - \widehat{B}_1)$$

$$+ (180^\circ - \widehat{C}_1) + (180^\circ - \widehat{D}_1)$$



Hình 19

$$= 720^\circ - (\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{D}_1)$$

$$= 720^\circ - 360^\circ = 360^\circ.$$

Vậy tổng các góc ngoài của tứ giác bằng  $360^\circ$ .

2. (h.20)

a)  $BA = BC$  và  $DA = DC$  nên  
 $BD$  là đường trung trực của  $AC$ .

b)  $\triangle ABD = \triangle CBD$  (c.c.c)  $\Rightarrow \hat{B}AD = \hat{B}CD$ .

Ta lại có

$$\hat{B}AD + \hat{B}CD = 360^\circ - \hat{B} - \hat{D}$$

$$= 360^\circ - 100^\circ - 70^\circ = 190^\circ.$$

Do đó  $\hat{A} = \hat{C} = 190^\circ : 2 = 95^\circ$ .

3. (h.21). Vẽ  $\triangle ABD$ , biết ba cạnh :  
 $AD = 4\text{cm}$ ,  $BD = 3\text{cm}$ ,  $AB = 2,5\text{cm}$ .

Vẽ  $\triangle BCD$ , biết hai cạnh và góc xen giữa :

$BD = 3\text{cm}$ ,  $\hat{D}BC = 60^\circ$ ,  $BC = 3\text{cm}$  ( $A$  và  $C$  thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ  $BD$ ).

4. Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau và tổng các góc của tứ giác :

$$\frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{3} = \frac{\hat{D}}{4} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}}{1 + 2 + 3 + 4} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ.$$

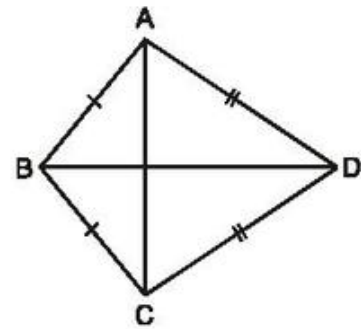
Do đó,  $\hat{A} = 36^\circ$ ,  $\hat{B} = 72^\circ$ ,  $\hat{C} = 108^\circ$ ,  $\hat{D} = 144^\circ$ .

5. Tính góc  $D$  của tứ giác  $ABCD$ , được  $107^\circ$ . Góc ngoài tại đỉnh  $D$  bằng  $73^\circ$ .

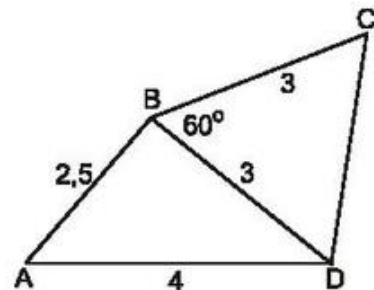
6. Giả sử bốn góc của một tứ giác là bốn góc nhọn thì tổng bốn góc của tứ giác nhỏ hơn  $360^\circ$ , trái với tính chất về tổng các góc của tứ giác bằng  $360^\circ$ . Vậy bốn góc của tứ giác không thể đều là góc nhọn.

Học sinh tự chứng minh bốn góc của tứ giác không thể đều là góc tù.

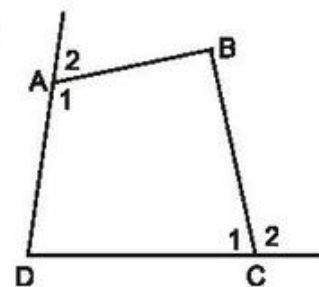
7. (h.22). Gọi  $\hat{A}_1$  và  $\hat{C}_1$  là các góc trong tại các đỉnh  $A$  và  $C$ . Gọi  $\hat{A}_2$  và  $\hat{C}_2$  là các góc ngoài tại các đỉnh  $A$  và  $C$ .



Hình 20



Hình 21



Hình 22

Ta có :  $\widehat{A}_2 + \widehat{C}_2 = (180^\circ - \widehat{A}_1) + (180^\circ - \widehat{C}_1)$   
 $= 360^\circ - \widehat{A}_1 - \widehat{C}_1.$  (1)

Ta lại có :  $\widehat{B} + \widehat{D} = 360^\circ - \widehat{A}_1 - \widehat{C}_1.$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra :  $\widehat{A}_2 + \widehat{C}_2 = \widehat{B} + \widehat{D}.$

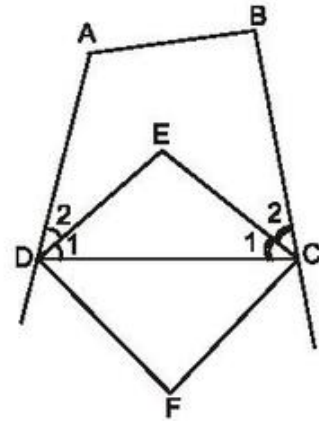
8. (h.23). Tứ giác ABCD có

$$\widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ - \widehat{A} - \widehat{B}$$

$$= 360^\circ - 110^\circ - 100^\circ = 150^\circ$$

nên  $\widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 = \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ.$

$\Delta CED$  có  $\widehat{CED} = 180^\circ - (\widehat{C}_1 + \widehat{D}_1)$   
 $= 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ.$



Hình 23

Vì DE và DF là các tia phân giác của hai góc kề bù nên  $DE \perp DF$ . Tương tự,  $CE \perp CF$ .

Xét tứ giác CEDF :

$$\widehat{F} = 360^\circ - \widehat{E} - \widehat{ECF} - \widehat{EDF} = 360^\circ - 105^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 75^\circ.$$

9. (h.24). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD của tứ giác ABCD.

Xét  $\Delta AOB$ , ta có :

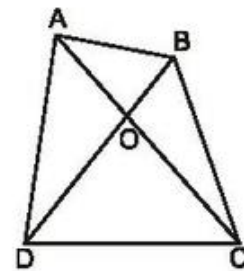
$OA + OB > AB$  (quan hệ giữa ba cạnh của tam giác).

Xét  $\Delta COD$ , ta có :  $OC + OD > CD$ .

Suy ra :  $OA + OB + OC + OD > AB + CD$

tức là  $AC + BD > AB + CD$ .

Chứng minh tương tự :  $AC + BD > AD + BC$ .



Hình 24

10. (h.25). Đặt  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$ .

Theo bài 9 :  $AC + BD > a + c$

$$AC + BD > b + d.$$



Do đó :  $2(AC + BD) > a + c + b + d$

$$\text{nên } AC + BD > \frac{a + c + b + d}{2}.$$

Vậy tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi.

Xét  $\triangle ABC$ , ta có :  $AC < a + b$ .

Xét  $\triangle ADC$ , ta có :  $AC < c + d$ .

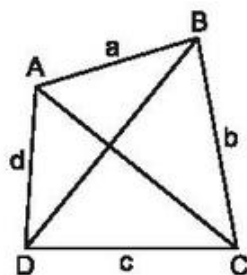
Suy ra :  $2AC < a + b + c + d$

$$\text{nên : } AC < \frac{a + b + c + d}{2}. \quad (1)$$

$$\text{Tương tự : } BD < \frac{a + b + c + d}{2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :  $AC + BD < a + b + c + d$ .

Vậy tổng hai đường chéo nhỏ hơn chu vi.



Hình 25

### Bài tập bổ sung

1.1. Chọn (B).

1.2. Ta có  $\widehat{A} + \widehat{B} = 360^\circ - (\widehat{C} + \widehat{D})$   
 $= 360^\circ - (60^\circ + 80^\circ) = 220^\circ$ .

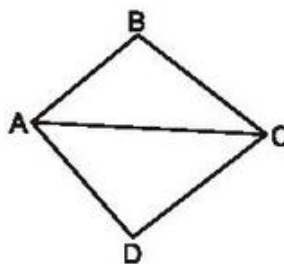
Từ  $\widehat{A} + \widehat{B} = 220^\circ$  và  $\widehat{A} - \widehat{B} = 10^\circ$ ,  
 ta tính được  $\widehat{A} = 115^\circ$ ,  $\widehat{B} = 105^\circ$ .

1.3. (h.bs.2)

$$\text{Chu vi } \triangle ABC + \text{Chu vi } \triangle ACD - \text{Chu vi } ABCD = 2AC$$

$$\text{hay } 56 + 60 - 66 = 2AC.$$

$$\text{Từ đó } AC = 25 \text{ (cm).}$$



Hình bs.2

### §2. Hình thang

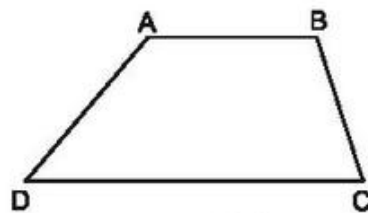
11. (h.26). Từ  $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$ ,  $\widehat{A} = 3\widehat{D}$ ,

$$\text{ta tính được : } \widehat{D} = 45^\circ, \widehat{A} = 135^\circ.$$

$$\text{Từ } \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ, \widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ,$$

$$\text{ta tính được : } \widehat{C} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ,$$

$$\widehat{B} = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ.$$



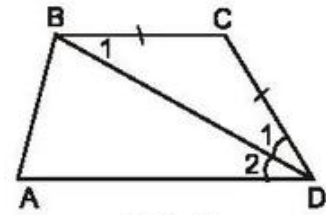
Hình 26

12. (h.27)  $\triangle ABCD$  có  $BC = CD$  nên là tam giác cân, suy ra  $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$ .

Theo giả thiết  $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$ .

Suy ra  $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_2$ , do đó  $BC \parallel AD$  (có hai góc so le trong bằng nhau).

Vậy  $ABCD$  là hình thang.



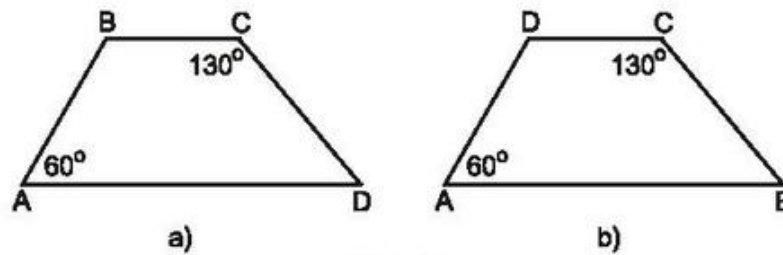
Hình 27

13. a) Tứ giác 1 chỉ có một cặp cạnh song song.  
b) Tứ giác 3 có hai cặp cạnh song song.  
c) Tứ giác 1 và tứ giác 3 là hình thang.

14.  $\widehat{A}$  và  $\widehat{C}$  là hai góc đối của hình thang.

Nếu  $\widehat{A}$  và  $\widehat{B}$  là hai góc kề một cạnh bên (h.28a) thì  $\widehat{B} = 120^\circ$ ,  $\widehat{D} = 50^\circ$ .

Nếu  $\widehat{A}$  và  $\widehat{D}$  là hai góc kề một cạnh bên (h.28b) thì  $\widehat{D} = 120^\circ$ ,  $\widehat{B} = 50^\circ$ .



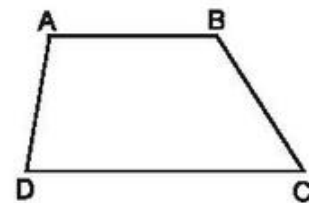
Hình 28

15. Xét hình thang  $ABCD$  có  $AB \parallel CD$  (h.29).

$\widehat{A}$  và  $\widehat{D}$  là hai góc kề cạnh bên  $AD$ , chúng có tổng bằng  $180^\circ$  nên trong hai góc đó có nhiều nhất là một góc nhọn, có nhiều nhất là một góc tù.

Hai góc  $\widehat{B}$  và  $\widehat{C}$  cũng vậy.

Do đó trong bốn góc  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$ ,  $\widehat{C}$ ,  $\widehat{D}$ , có nhiều nhất là hai góc nhọn, có nhiều nhất là hai góc tù.

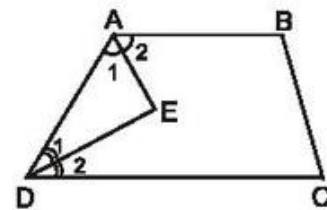


Hình 29

16. Xét hình thang  $ABCD$  có  $AB \parallel CD$  (h.30).

Ta có  $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{A}$  và  $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = \frac{1}{2}\widehat{D}$

mà  $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$



Hình 30

nên  $\widehat{A}_1 + \widehat{D}_1 = 90^\circ$ .  $\triangle ADE$  có  $\widehat{A}_1 + \widehat{D}_1 = 90^\circ$

nên  $\widehat{AED} = 90^\circ$ . Vậy  $AE \perp DE$ .

17. (h.31).

a) Có ba hình thang : BDIC, BIEC, BDEC.

b) Ta sẽ chứng minh  $DE = BD + CE$ .

Thật vậy :  $DE \parallel BC \Rightarrow \widehat{I}_1 = \widehat{B}_1$  (so le trong).

Ta lại có  $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$  nên  $\widehat{I}_1 = \widehat{B}_2$ . Do đó  $\triangle BDI$  cân tại D, suy ra  $DI = BD$ . (1)

Chứng minh tương tự, ta có  $EI = CE$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $DI + EI = BD + CE$ , tức là  $DE = BD + CE$ .

18. (h.32). Vì  $\triangle ABC$  vuông cân tại A nên  $\widehat{C}_1 = 45^\circ$ .

$\triangle BCD$  vuông cân tại B nên  $\widehat{C}_2 = 45^\circ$ .

Do đó  $\widehat{C} = 90^\circ$ .

Tứ giác ABDC có  $AB \parallel CD$  và  $\widehat{A} = 90^\circ$  nên là hình thang vuông.

19. (h.33). Kẻ BH vuông góc với CD. Hình thang ABHD có hai cạnh bên AD, BH song song nên  $AD = BH$ ,  $AB = DH$ .

Do đó  $HB = HD = 2\text{cm}$ . Suy ra  $HC = 2\text{cm}$ .

$\triangle BHC$  vuông cân tại H  $\Rightarrow \widehat{C} = 45^\circ$ .

Suy ra  $\widehat{ABC} = 135^\circ$ .

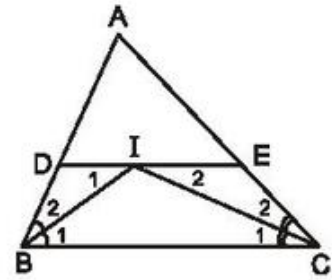
20. (h.34). Kẻ  $BE \parallel AD$  thì  $AD = BE$ ,  $AB = DE$ .

Ta có  $AD + BC = BE + BC$ ,

$CD - AB = CD - DE = EC$ .

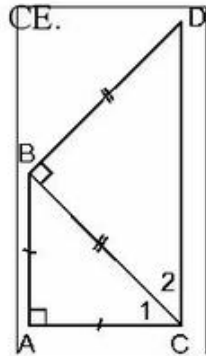
Xét  $\triangle BEC$ , ta có

$BE + BC > EC$  nên  $AD + BC > CD - AB$ .

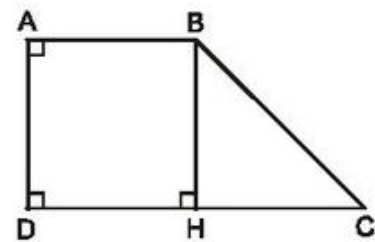


Hình 31

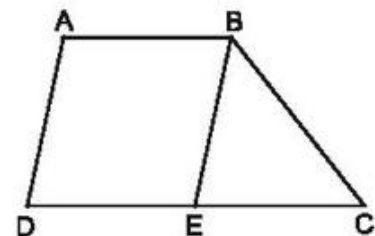
(2)



Hình 32

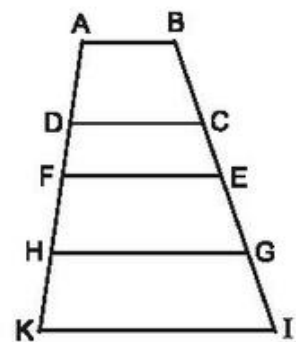


Hình 33



Hình 34

21. Trên hình 35 có 10 hình thang : ABCD, ABEF, ABGH, ABIK, DCEF, DCGH, DCIK, FEIH, FEIK, HGIK.



Hình 35

### Bài tập bổ sung

- 2.1. Chọn (C).

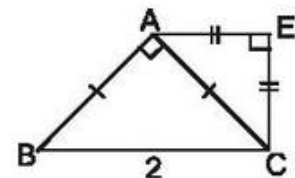
2.2.  $\widehat{A} = 110^\circ, \widehat{D} = 70^\circ, \widehat{C} = 55^\circ, \widehat{B} = 125^\circ$ .

- 2.3. (h.bs.3)

a)  $AE \parallel BC$  và  $\widehat{E} = 90^\circ$  nên AECB là hình thang vuông.

b)  $\widehat{E} = \widehat{ECB} = 90^\circ, \widehat{B} = 45^\circ, \widehat{BAE} = 135^\circ$ .

$AB = \sqrt{2}; AE = EC = 1$ .



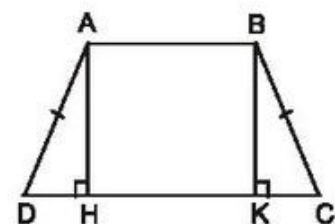
Hình bs.3

### §3. Hình thang cân

22. (h.36)

$\triangle AHD = \triangle BKC$  (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow HD = KC$ .



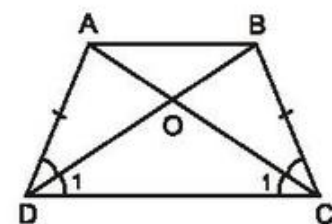
Hình 36

23. (h.37). Vì ABCD là hình thang cân nên  $AD = BC, \widehat{ADC} = \widehat{BCD}$ .

$\triangle ADC = \triangle BCD$  (c.g.c)  $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$

$\Rightarrow \triangle OCD$  cân  $\Rightarrow OC = OD$ .

Ta lại có  $AC = BD$  nên  $OA = OB$ .



Hình 37



24. (h.38)

$$a) \Delta ABC \text{ cân tại } A \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}.$$

Để chứng minh  $AM = AN$ .

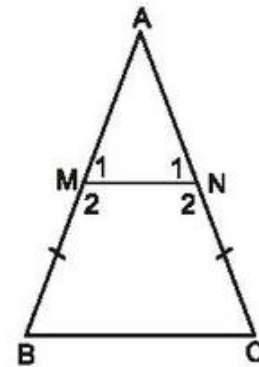
$\Delta AMN$  cân tại A

$$\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{N}_1 = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}.$$

Suy ra  $\widehat{B} = \widehat{M}_1$ , do đó  $MN \parallel BC$ .

Tứ giác  $BMNC$  là hình thang, lại có  $\widehat{B} = \widehat{C}$  nên là hình thang cân.

$$b) \widehat{B} = \widehat{C} = 70^\circ, \widehat{M}_2 = \widehat{N}_2 = 110^\circ.$$



Hình 38

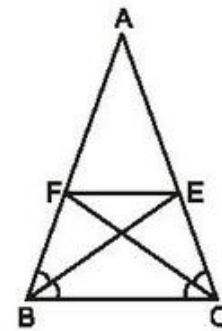
25. (h.39).

$$\Delta ABE = \Delta ACF \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow AE = AF.$$

Sử dụng các tam giác cân  $AFE$ ,  $ABC$  để chứng minh  $BFEC$  là hình thang cân.

Chứng minh  $\Delta BFE$  có hai góc bằng nhau để suy ra  $BF = FE$ .



Hình 39

26. (h.40). Xét hình thang  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $AC = BD$ . Qua B kẻ đường thẳng song song với  $AC$ , cắt  $DC$  ở  $K$ .

Hình thang  $ABKC$  có hai cạnh bên song song  $BK \parallel AC$  nên  $BK = AC$ . Ta lại có  $AC = BD$  nên  $BK = BD$ , do đó  $\Delta BDK$  cân.

$$\Delta BDK \text{ cân tại } B \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{K}, AC \parallel BK$$

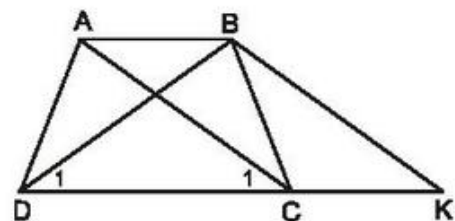
$$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{K} \text{ (đồng vị)}. \text{ Suy ra } \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1.$$

$\Delta ACD$  và  $\Delta BDC$  có :

$DC$  là cạnh chung,

$$\widehat{C}_1 = \widehat{D}_1 \text{ (chứng minh trên),}$$

$$AC = BD \text{ (gt).}$$



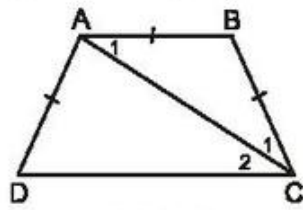
Hình 40

$$\text{Do đó } \Delta ACD = \Delta BDC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{BCD}.$$

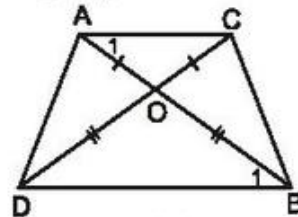
Hình thang  $ABCD$  có  $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$  nên là hình thang cân.

27. *ĐS*: Các góc còn lại bằng  $50^\circ, 130^\circ, 130^\circ$ .

28. (h.41). Chứng minh rằng  $\hat{C}_1$  và  $\hat{C}_2$  cùng bằng  $\hat{A}_1$ .



Hình 41



Hình 42

29. (h.42). Chứng minh rằng  $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$  để suy ra  $AC \parallel BD$ . Hình thang ACBD có hai đường chéo bằng nhau  $AB = CD$  nên là hình thang cân.

30. (h.43).

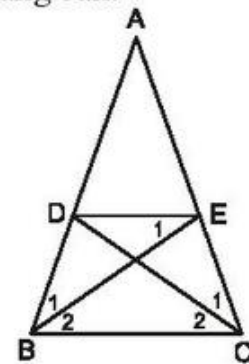
a) BDEC là hình thang cân. Học sinh tự giải thích.

b) Ta thấy:  $BD = DE \Leftrightarrow \hat{B}_1 = \hat{E}_1$

$$\Leftrightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \text{ (vì } \hat{E}_1 = \hat{B}_2 \text{)}.$$

Tương tự,  $DE = EC \Leftrightarrow \hat{C}_1 = \hat{C}_2$ .

Như vậy, nếu BE, CD là các đường phân giác của  $\triangle ABC$  thì  $BD = DE = EC$ .



Hình 43

31. (h.44). Dễ dàng chứng minh được  $OD = OC, OA = OB$  nên O thuộc đường trung trực của hai đáy.

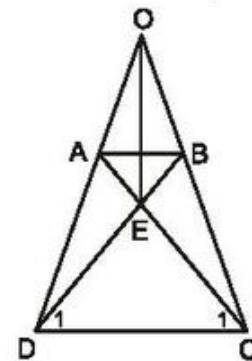
$$\triangle ADC = \triangle BCD \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow ED = EC. \quad (1)$$

Ta lại có  $AC = BD$  nên  $EA = EB. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra E thuộc đường trung trực của hai đáy.

Vậy OE là đường trung trực của hai đáy.



Hình 44

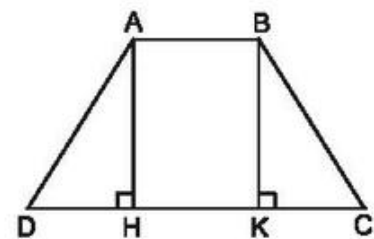
32. (h.45)

a) Kẻ đường cao BK.

$$\triangle AHD = \triangle BKC \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow HD = KC.$$

Hình thang ABKH có các cạnh bên AH, BK song song nên  $AB = HK$ .



Hình 45

Ta có  $a - b = DC - AB = DC - HK$   
 $= HD + KC = 2HD.$

Vậy  $HD = \frac{a - b}{2}$ ;  $HC = DC - HD = a - \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2}.$

b) Xét hình thang cân ABCD có đáy  $AB = 10\text{cm}$ , đáy  $CD = 26\text{cm}$ , cạnh bên  $AD = 17\text{cm}$ . Trước hết tính HD, được 8cm. Sau đó tính AH, được 15cm.

33. (h.46). Ta đã có  $AD = BC = 3\text{cm}$ . Để dàng chứng minh  $\triangle ABD$  cân nên  $AB = AD = 3\text{cm}$ . Còn phải tính độ dài CD.

Vì  $\triangle DBC$  vuông tại B nên  $\widehat{C} + \widehat{D}_2 = 90^\circ$ . Ta lại có  $\widehat{C} = \widehat{D} = 2\widehat{D}_2$  nên  $\widehat{C} = 60^\circ$ ,  $\widehat{D}_2 = 30^\circ$ .

Gọi O là giao điểm của AD và BC. Do  $\triangle ODC$  có đường phân giác DB cũng là đường cao nên

là tam giác cân, lại có  $\widehat{C} = 60^\circ$  nên là tam giác đều. Do đó  $CD = CO = 2BC = 6\text{cm}$ .

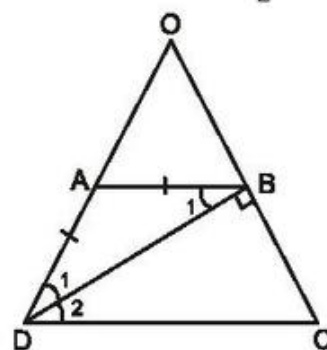
Vậy chu vi hình thang ABCD bằng :

$$3 + 3 + 3 + 6 = 15(\text{cm}).$$

Chú ý. Ta có nhận xét :

– Nếu một tam giác vuông có một góc  $30^\circ$  thì cạnh đối diện với góc đó bằng nửa cạnh huyền (vì tam giác vuông đó bằng "nửa tam giác đều").

– Nếu một tam giác vuông có một cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền thì góc đối diện với cạnh góc vuông đó bằng  $30^\circ$  (vì tam giác vuông đó bằng "nửa tam giác đều").



Hình 46

### Bài tập bổ sung

3.1. Chọn (A).

3.2. (h.bs.4)

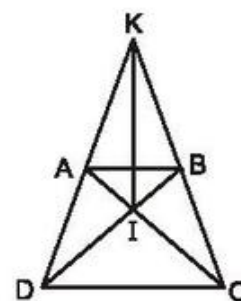
$\triangle ACD = \triangle BDC$  (c.c.c) suy ra  $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$ ,  
do đó  $ID = IC$ . (1)

Tam giác KCD có hai góc ở đáy bằng nhau  
nên  $KD = KC$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra KI là đường trung trực của CD.

Hãy chứng minh  $IA = IB$  và

$KA = KB$  để suy ra KI là đường trung trực của AB.



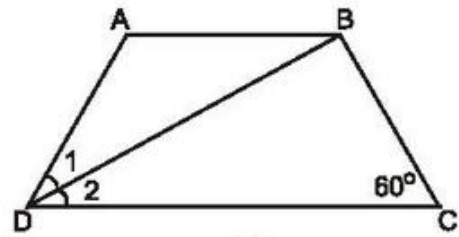
Hình bs.4

3.3. (h.bs.5)

Ta có  $\widehat{D} = \widehat{C} = 60^\circ$   
 nên  $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = 60^\circ : 2 = 30^\circ$ ,  
 suy ra  $\widehat{CBD} = 90^\circ$ .

Tam giác vuông CBD có  $\widehat{D}_2 = 30^\circ$   
 nên  $BC = \frac{1}{2}CD$ .

Ta chứng minh được  $AD = AB$ . Từ đó chu vi hình thang bằng  $5AD$ .  
 Vậy  $AD = AB = BC = 4\text{cm}$ ,  $CD = 8\text{cm}$ .



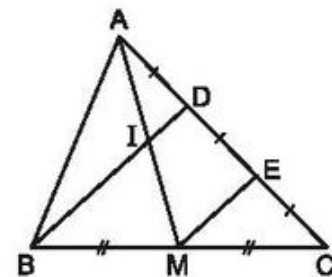
Hình bs.5

§4. Đường trung bình của tam giác, của hình thang

34. (h.47).

Gọi E là trung điểm của DC. Vì  $\triangle BDC$  có  $BM = MC$ ,  $DE = EC$  nên  $BD \parallel ME$ , suy ra  $DI \parallel EM$ .

Do  $\triangle AME$  có  $AD = DE$ ,  $DI \parallel EM$  nên  $AI = IM$ .

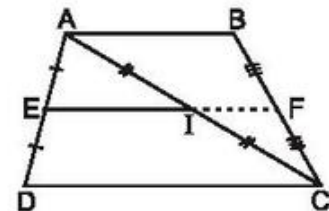


Hình 47

35. (h.48). Vì  $\triangle ADC$  có  $AE = ED$ ,  $AI = IC$  nên  $EI \parallel DC$ .

Tương tự,  $\triangle ABC$  có  $AI = IC$ ,  $BF = FC$  nên  $IF \parallel AB$ . Do  $AB \parallel DC$  nên  $IF \parallel DC$ .

Qua điểm I, ta có  $EI \parallel DC$  và  $IF \parallel DC$  nên theo tiên đề Ô-clit : E, I, F thẳng hàng.



Hình 48

36. (h.49).

a) Vì  $\triangle ADC$  có  $AE = ED$ ,  $AI = IC$  nên  $EI \parallel DC$ ,  $EI = \frac{CD}{2}$ . Tương tự,  $\triangle ABC$  có

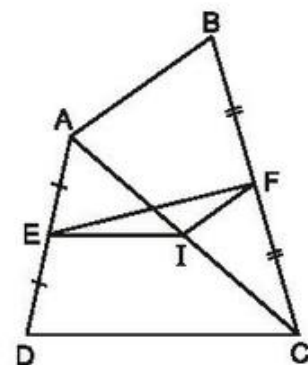
$AI = IC$ ,  $BF = FC$  nên  $IF \parallel AB$ ,  $IF = \frac{AB}{2}$ .

b) Trong  $\triangle EFI$  ta có  $EF \leq EI + IF$  nên

$$EF \leq \frac{CD}{2} + \frac{AB}{2}$$

$$\text{Vậy } EF \leq \frac{AB + CD}{2}$$

Dấu "=" xảy ra trong trường hợp E, I, F thẳng hàng, tức là  $AB \parallel CD$ .



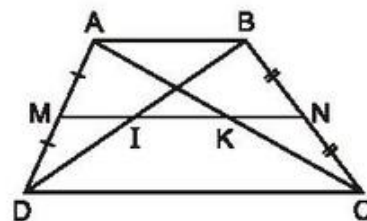
Hình 49



37. (h.50). Vì MN là đường trung bình của hình thang ABCD nên  $MN \parallel AB \parallel CD$ .  $\triangle ADC$  có  $AM = MD$ ,  $MK \parallel DC$  nên  $AK = KC$ ,  $MK$  là đường trung bình. Do đó  $MK = \frac{DC}{2} = \frac{14}{2} = 7(\text{cm})$ . Tương tự,  $\triangle ABD$  có  $AM = MD$ ,  $MI \parallel AB$  nên  $BI = ID$ ,  $MI$  là đường trung bình. Do đó

$$MI = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3(\text{cm}).$$

Suy ra  $IK = MK - MI = 7 - 3 = 4(\text{cm})$ . Tương tự,  $\triangle ABC$  có  $BN = NC$ ,  $NK \parallel AB$  nên  $AK = KC$ ,  $KN$  là đường trung bình. Do đó  $KN = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3(\text{cm})$ .

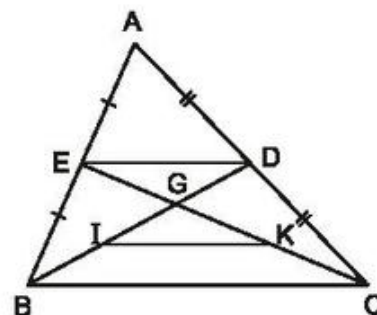


Hình 50

38. (h.51). Vì  $\triangle ABC$  có  $AE = EB$ ,  $AD = DC$  nên  $ED$  là đường trung bình, do đó  $ED \parallel BC$ ,  $ED = \frac{BC}{2}$ . Tương tự,  $\triangle GBC$  có  $GI = IB$ ,  $GK = KC$  nên  $IK$  là đường trung bình, do đó  $IK \parallel BC$ ,  $IK = \frac{BC}{2}$ .

Suy ra:  $ED \parallel IK$  (cùng song song với  $BC$ ),

$$ED = IK \text{ (cùng bằng } \frac{BC}{2} \text{)}.$$

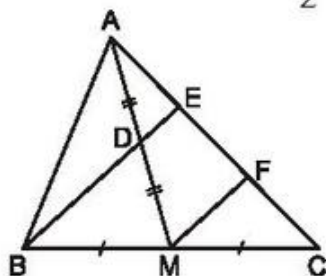


Hình 51

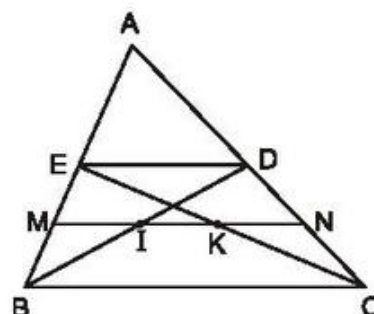
39. (h.52). Gọi  $F$  là trung điểm của  $EC$ . Vì  $\triangle BEC$  có  $BM = MC$ ,  $EF = FC$  nên  $MF \parallel BE$ .

$\triangle AMF$  có  $AD = DM$ ,  $DE \parallel MF$  nên  $AE = EF$ .

Do  $AE = EF = FC$  nên  $AE = \frac{1}{2}EC$ .



Hình 52



Hình 53

40. (h.53). Đặt  $BC = a$ .

Vì  $\triangle ABC$  có  $AE = EB$ ,  $AD = DC$  nên  $ED$  là đường trung bình, do đó  $ED \parallel BC$

$$\text{và } ED = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}.$$

Do  $MN$  là đường trung bình của hình thang  $BEDC$  nên  $MN \parallel ED \parallel BC$ .

$$\triangle BED \text{ có } BM = ME, MI \parallel ED \text{ nên } MI \text{ là đường trung bình, } MI = \frac{ED}{2} = \frac{a}{4}.$$

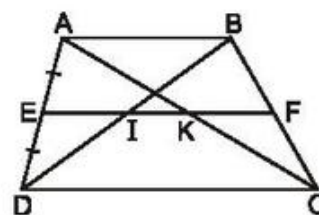
$$\triangle CED \text{ có } CN = ND, NK \parallel ED \text{ nên } NK \text{ là đường trung bình, } NK = \frac{ED}{2} = \frac{a}{4}.$$

$$\triangle EBC \text{ có } EM = MB, MK \parallel BC \text{ nên } MK \text{ là đường trung bình, } MK = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Suy ra } IK = MK - MI = \frac{a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{a}{4}.$$

Vậy  $MI = IK = KN$ .

41. (h.54). Xét hình thang  $ABCD$  có  $AB \parallel CD$ ,  $AE = ED$ ,  $EF \parallel AB \parallel CD$  nên  $BF = FC$ . Vì  $\triangle ADC$  có  $AE = ED$ ,  $EK \parallel DC$  nên  $AK = KC$ .

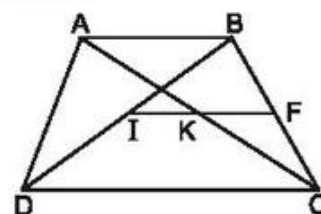


Hình 54

Tương tự,  $\triangle ABD$  có  $AE = ED$ ,  $EI \parallel AB$  nên  $BI = ID$ .

Như vậy,  $EF$  đi qua trung điểm của  $BC$ , của  $AC$  và của  $BD$ .

42. (h.55). Xét hình thang  $ABCD$  có  $AB \parallel CD$ ,  $AB < CD$ ,  $I$  và  $K$  là trung điểm của  $BD$  và  $AC$ .



Hình 55

Gọi  $F$  là trung điểm của  $BC$ . Vì  $\triangle BDC$  có  $BI = ID$ ,  $BF = FC$  nên  $IF$  là đường trung bình.

Do đó  $IF \parallel DC$  và  $IF = \frac{DC}{2}$ . Tương tự,  $\triangle ABC$

có  $BF = FC$ ,  $AK = KC$  nên  $FK$  là đường trung bình. Do đó  $FK \parallel AB \parallel CD$  và  $FK = \frac{AB}{2}$ .

Qua  $F$  ta có  $IF \parallel CD$  và  $FK \parallel CD$  nên  $I, K, F$  thẳng hàng. Do đó

$$IK = IF - FK = \frac{DC}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{DC - AB}{2}.$$

43. (h.56).

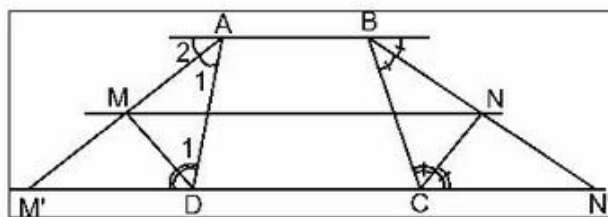
a) Gọi  $M', N'$  là giao điểm của  $AM, BN$  với  $DC$ .

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{M}' \Rightarrow \triangle ADM' \text{ cân.}$$

$\triangle ADM'$  cân có  $DM$  là đường phân giác nên  $AM = MM'$ .  
Tương tự  $BN = NN'$ .

Vì  $MN$  là đường trung bình của hình thang  $ABN'M'$  nên  $MN \parallel M'N'$ , do đó  $MN \parallel CD$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } MN &= \frac{AB + M'N'}{2} = \frac{AB + M'D + DC + CN'}{2} = \frac{AB + AD + DC + CB}{2} \\ &= \frac{a + d + c + b}{2}. \end{aligned}$$



Hình 56

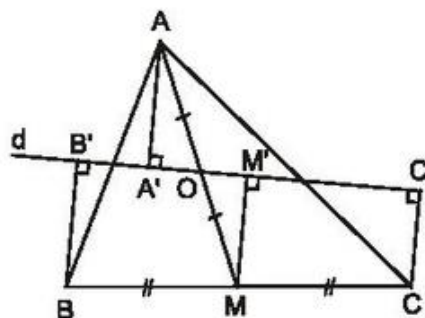
44. (h.57). Kẻ  $MM' \perp d$ .

Hình thang  $BB'C'C$  có  $BM = MC$ ,  
 $MM' \parallel BB' \parallel CC'$  nên  $MM'$  là đường trung bình, do đó

$$MM' = \frac{BB' + CC'}{2}. \quad (1)$$

$\triangle AOA' = \triangle MOM'$  (cạnh huyền - góc nhọn)  $\Rightarrow MM' = AA'$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $AA' = \frac{BB' + CC'}{2}$ .



Hình 57

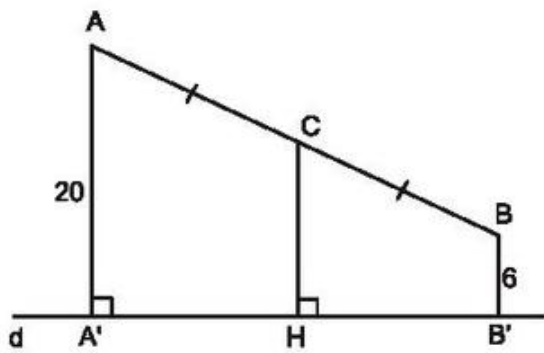
### Bài tập bổ sung

4.1. Chọn (C).

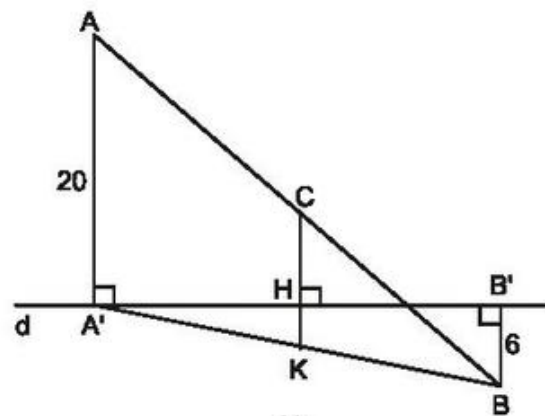
4.2. Xét hai trường hợp :

– Trường hợp A và B nằm cùng phía đối với đường thẳng  $d$  (h.bs.6a).

$$\text{Ta tính được } CH = \frac{20 + 6}{2} = 13 \text{ (cm).}$$



a)



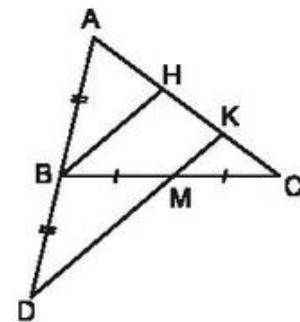
b)

Hình bs.6

– Trường hợp A và B nằm khác phía đối với đường thẳng d (h.bs.6b).

Ta tính được  $CH = CK - HK$   
 $= 10 - 3 = 7$  (cm).

4.3. (h.bs.7) Gọi H là trung điểm của AK.  
 Hãy chứng minh  $BH \parallel DK$  và  $HK = KC$ .



Hình bs.7

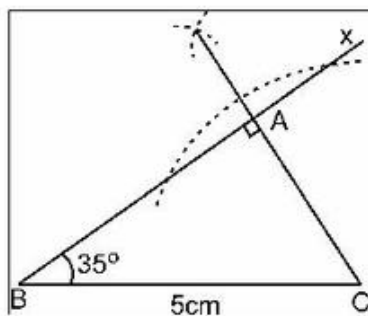
### §5. Dựng hình bằng thước và compa. Dựng hình thang

45. (h.58). Cách dựng :

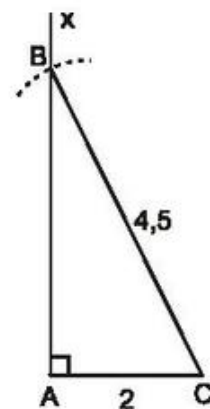
- Dựng đoạn thẳng BC bằng 5cm.
- Dựng góc  $CBx$  bằng  $35^\circ$ .
- Dựng  $CA \perp Bx$ .

Chứng minh :

$\triangle ABC$  có  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $BC = 5\text{cm}$ ,  $\hat{B} = 35^\circ$ , thoả mãn đề bài.



Hình 58



Hình 59



46. (h.59). *Cách dựng* :

- Dựng đoạn thẳng AC bằng 2cm.
- Dựng góc CAx bằng  $90^\circ$ .
- Dựng cung tâm C có bán kính 4,5cm, cắt tia Ax ở B.
- Dựng đoạn thẳng BC.

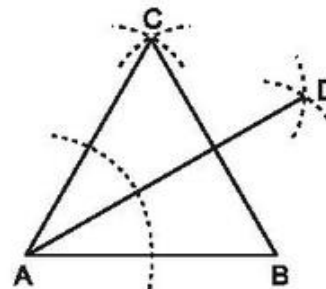
*Chứng minh* : Học sinh tự giải.

47. (h.60). *Cách dựng* :

- Dựng  $\triangle ABC$  đều.
- Dựng tia phân giác AD của góc A.

Ta có :  $\widehat{BAD} = 30^\circ$ .

*Chứng minh* : Học sinh tự giải.

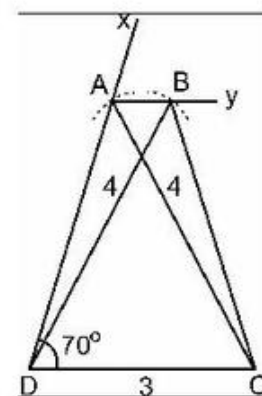


Hình 60

48. (h.61). *Cách dựng* :

- Dựng đoạn thẳng CD bằng 3cm.
- Dựng góc CDx bằng  $70^\circ$ .
- Dựng cung tâm C có bán kính 4cm, cắt tia Dx ở A.
- Dựng tia Ay // DC (Ay và C thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AD).
- Dựng cung tâm D có bán kính 4cm, cắt tia Ay ở B.
- Dựng đoạn thẳng BC.

*Chứng minh* : Học sinh tự giải.



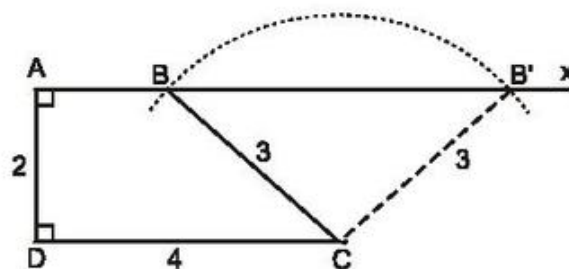
Hình 61

49. (h.62). *Cách dựng* :

- Dựng  $\triangle ADC$ , biết hai cạnh và góc xen giữa : AD = 2cm, CD = 4cm,  $\widehat{D} = 90^\circ$ .
- Dựng tia Ax  $\perp$  AD (Ax và C thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AD).
- Dựng cung tâm C có bán kính 3cm, cắt tia Ax ở B.
- Kẻ đoạn thẳng BC.

*Chứng minh* : Học sinh tự giải.

*Chú ý*. Có hai hình thang ABCD, AB'CD thoả mãn bài toán.

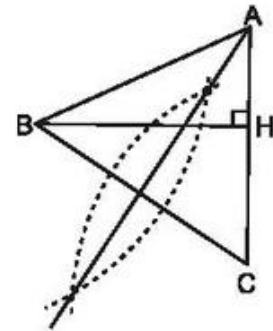


Hình 62

50. (h.63). *Cách dựng :*

- Dựng  $\Delta BHC$  vuông tại H biết cạnh huyền  $BC = 3\text{cm}$ , cạnh góc vuông  $BH = 2,5\text{cm}$  (học sinh tự nêu cách dựng).
- Dựng đường trung trực của BC, cắt CH tại A.
- Kẻ đoạn thẳng AB.

*Chứng minh :* Học sinh tự giải.



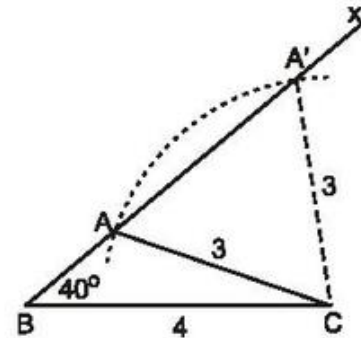
Hình 63

51. (h.64). *Cách dựng :*

- Dựng đoạn thẳng BC bằng 4cm.
- Dựng góc  $CBx$  bằng  $40^\circ$ .
- Dựng cung tâm C có bán kính 3cm, cắt tia Bx tại A.
- Kẻ đoạn thẳng AC.

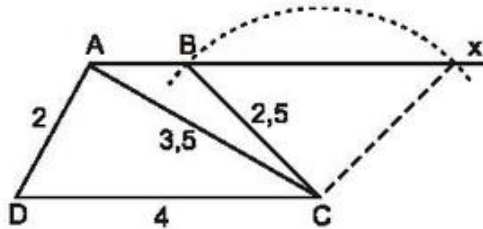
*Chứng minh :* Học sinh tự giải.

*Chú ý.* Có hai tam giác ABC, A'BC thoả mãn bài toán.

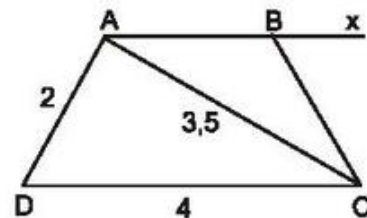


Hình 64

52. (h.65). Dựng  $\Delta ACD$ , sau đó dựng điểm B.



Hình 65



Hình 66

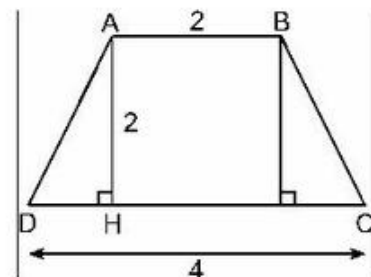
53. (h.66). Dựng  $\Delta ACD$ , sau đó dựng điểm B (bằng cách dựng  $\widehat{DCB} = \widehat{D}$  hoặc  $DB = 3,5\text{cm}$ ).

54. (h.67).

Ta tính được

$$DH = \frac{CD - AB}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1(\text{cm}).$$

Dựng  $\Delta ADH$ , sau đó dựng các điểm C và B.



Hình 67

55. (h.68). *Phân tích*<sup>(\*)</sup>

Giả sử đã dựng được hình thang ABCD thoả mãn yêu cầu của bài toán. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC, cắt CD ở E. Hình thang ABCE có hai cạnh bên AE, BC song song nên  $EC = AB = 2\text{cm}$ . Do đó  $DE = 2\text{cm}$ .

Tam giác ADE dựng được vì biết một cạnh và hai góc kề.

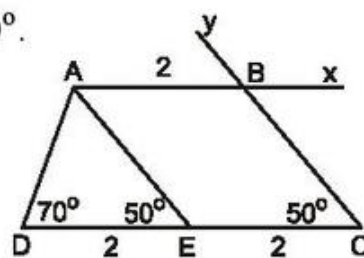
Từ đó dựng được các điểm C và B.

*Cách dựng :*

– Dựng  $\triangle ADE$ , biết  $DE = 2\text{cm}$ ,  $\widehat{D} = 70^\circ$ ,  $\widehat{E} = 50^\circ$ .

– Trên tia DE dựng điểm C sao cho  $DC = 4\text{cm}$ .

– Dựng các tia  $Ax \parallel EC$ ,  $Cy \parallel EA$ , chúng cắt nhau ở B.



Hình 68

*Chứng minh :*

ABCD là hình thang vì  $AB \parallel CD$ .

Ta có  $\widehat{D} = 70^\circ$ ,  $DC = 4\text{cm}$ ,  $\widehat{C} = \widehat{AED}$  (đồng vị,  $BC \parallel AE$ ) nên  $\widehat{C} = 50^\circ$ .

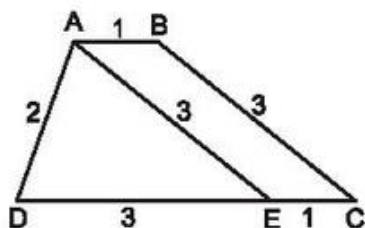
Hình thang ABCE có hai cạnh bên AE, BC song song nên

$$AB = EC = 4 - 2 = 2(\text{cm}).$$

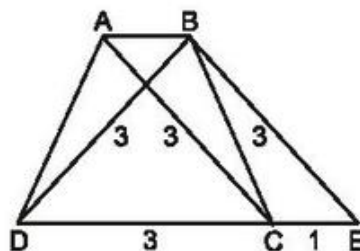
56. (h.69).

*Gợi ý.* Kẻ  $AE \parallel BC$ .

*Cách dựng :* Dựng  $\triangle ADE$ , sau đó dựng các điểm C và B.



Hình 69



Hình 70

57. (h.70).

*Gợi ý.* Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt DC ở E.

*Cách dựng :* Dựng  $\triangle BDE$  cân, biết ba cạnh. Sau đó, dựng các điểm C và A.

(\*) Không yêu cầu học sinh trình bày bước phân tích.

58. (h.71). Cách dựng :

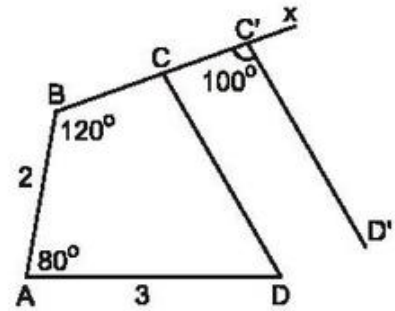
– Dựng  $\triangle ABD$  có  $\widehat{A} = 80^\circ$ ,  $AB = 2\text{cm}$ ,  $AD = 3\text{cm}$ .

– Dựng góc  $ABx$  bằng  $120^\circ$  ( $Bx$  và  $D$  thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ  $AB$ ).

– Lấy điểm  $C'$  bất kì trên tia  $Bx$ .

– Dựng góc  $BC'D'$  bằng  $100^\circ$  ( $CD'$  và  $D$  thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ  $BC'$ ).

– Qua  $D$  dựng đường thẳng song song với  $D'C'$ , cắt  $Bx$  ở  $C$ .



Hình 71

Chứng minh :

$$CD \parallel C'D' \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{BC'D'} = 100^\circ.$$

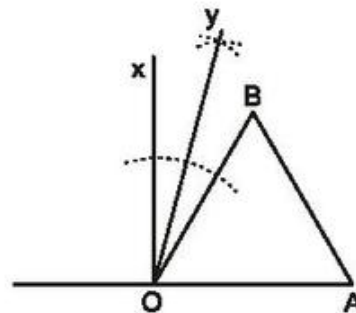
Tứ giác  $ABCD$  có  $AB = 2\text{cm}$ ,  $AD = 3\text{cm}$ ,  $\widehat{A} = 80^\circ$ ,  $\widehat{B} = 120^\circ$ ,  $\widehat{C} = 100^\circ$ , thoả mãn bài toán.

59. (h.72). Cách dựng :

– Dựng  $\triangle AOB$  đều.

– Dựng tia  $Ox \perp OA$  ( $Ox$  và  $B$  thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ  $OA$ ).

– Dựng  $Oy$  là tia phân giác của góc  $BOx$ . Ta có  $\widehat{AOy} = 75^\circ$ .

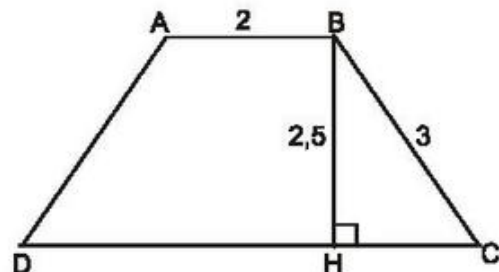


Hình 72

Chứng minh : Học sinh tự giải.

### Bài tập bổ sung

5.1. (h.bs.8) Dựng tam giác  $BHC$  vuông tại  $H$  có  $BH = 2,5\text{cm}$  và  $BC = 3\text{cm}$ . Sau đó dựng  $A$  và  $D$ .

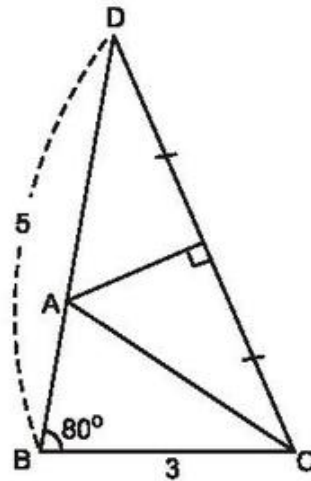


Hình bs.8



5.2. (h.bs.9)

- Dựng  $\triangle DBC$  có  $\widehat{B} = 80^\circ$ ,  
 $BD = 5\text{cm}$ ,  $BC = 3\text{cm}$ .
- Dựng đường trung trực của  $CD$ ,  
 cắt  $BD$  tại  $A$ .
- Kẻ đoạn thẳng  $AC$ .



Hình bs.9

### §6. Đối xứng trục

60. (h.73).

- a)  $D$  đối xứng với  $M$  qua  $AB$   
 $\Rightarrow AB$  là đường trung trực của  $MD$   
 $\Rightarrow AD = AM$ .

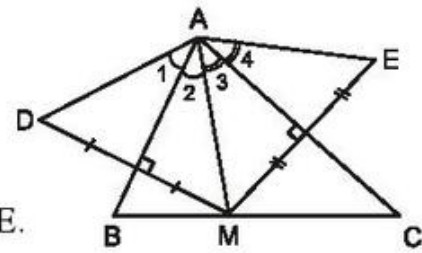
Chứng minh tương tự,  $AE = AM$ . Vậy  $AD = AE$ .

- b)  $AD = AM \Rightarrow \triangle ADM$  cân tại  $A \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ .

Chứng minh tương tự,  $\widehat{A}_3 = \widehat{A}_4$ .

$$\text{Do đó } \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 + \widehat{A}_4 = 2(\widehat{A}_2 + \widehat{A}_3) = 2 \cdot 70^\circ = 140^\circ.$$

Suy ra  $\widehat{DAE} = 140^\circ$ .



Hình 73

61. (h.74).

- a)  $M$  đối xứng với  $H$  qua  $BC$   
 $\Rightarrow BC$  là đường trung trực của  $HM$   
 $\Rightarrow BH = BM$ .

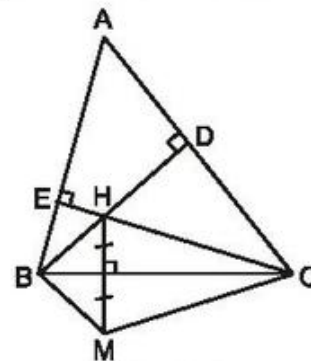
Chứng minh tương tự,  $CH = CM$ .

$$\triangle BHC = \triangle BMC \text{ (c.c.c.)}$$

- b) Gọi  $D$  là giao điểm của  $BH$  và  $AC$ ,  $E$  là giao điểm của  $CH$  và  $AB$ .

Xét tứ giác  $ADHE$  :

$$\widehat{DHE} = 360^\circ - \widehat{D} - \widehat{E} - \widehat{A} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$



Hình 74

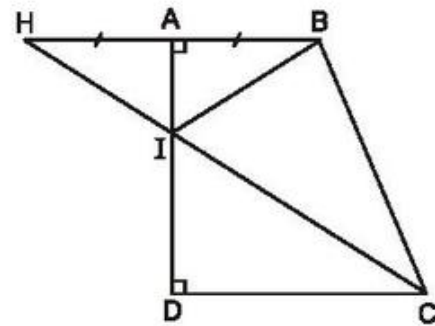
Ta lại có  $\widehat{DHE} = \widehat{BHC}$  (đối đỉnh),  
 $\widehat{BHC} = \widehat{BMC}$  ( $\triangle BHC = \triangle BMC$ )  
 nên  $\widehat{BMC} = \widehat{DHE} = 120^\circ$ .

62. (h.75). B đối xứng với H qua AD  
 $\Rightarrow$  AD là đường trung trực của BH

$\Rightarrow IB = IH$   
 $\Rightarrow \triangle BIH$  cân tại I  
 $\Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{AIH}$ .

Ta lại có  $\widehat{AIH} = \widehat{DIC}$  (đối đỉnh).

Suy ra  $\widehat{AIB} = \widehat{DIC}$ .



Hình 75

*Chú ý.* Cách khác để chứng minh  $\widehat{AIB} = \widehat{AIH}$  :

B đối xứng với H qua AD, I và A đối xứng với chính nó qua AD nên góc AIB đối xứng với góc AIH qua AD. Vậy  $\widehat{AIB} = \widehat{AIH}$ .

63. (h.76). A' đối xứng với A qua xy  
 $\Rightarrow$  xy là đường trung trực của AA'  
 $\Rightarrow AC = A'C, AM = A'M$ .

Ta có :

$$AC + CB = A'C + CB = A'B, \quad (1)$$

$$AM + MB = A'M + MB, \quad (2)$$

$$A'B < A'M + MB \text{ (quan hệ giữa ba cạnh trong } \triangle A'MB). \quad (3)$$

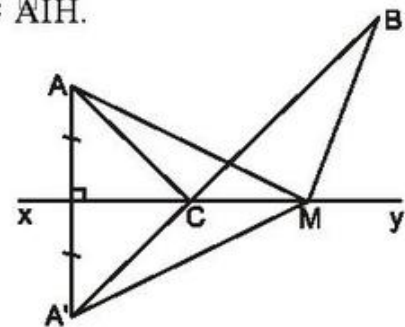
Từ (1), (2), (3) suy ra :  $AC + CB < AM + MB$ .

64. (h.77).

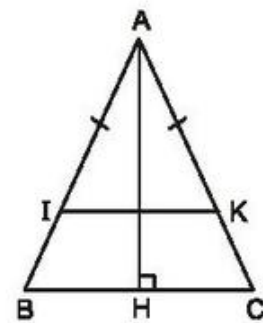
Vì  $\triangle ABC$  cân tại A, AH là đường cao nên AH là tia phân giác của góc A.

Do  $\triangle AIK$  cân tại A, AH là tia phân giác của góc A nên AH là đường trung trực của IK.

Vậy I đối xứng với K qua AH.



Hình 76



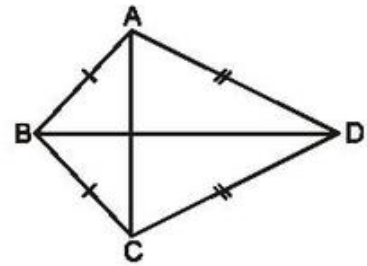
Hình 77

65. (h.78).

$AB = BC \Rightarrow B$  thuộc đường trung trực của  $AC$ .

$CD = DA \Rightarrow D$  thuộc đường trung trực của  $AC$ .

Vậy  $BD$  là đường trung trực của  $AC$ , do đó  $A$  đối xứng với  $C$  qua  $BD$ .



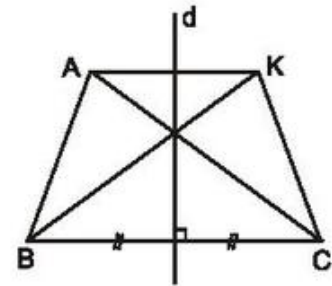
Hình 78

66. (h.79).

a) Đoạn thẳng đối xứng với đoạn thẳng  $AB$  qua  $d$  là  $KC$ .

Đoạn thẳng đối xứng với đoạn thẳng  $AC$  qua  $d$  là  $KB$ . Học sinh tự giải thích.

b) Vì  $d$  là đường trung trực của  $AK$  và của  $BC$  nên  $AK \perp d$ ,  $BC \perp d$ . Vậy  $AK \parallel BC$ , do đó  $AKCB$  là hình thang.

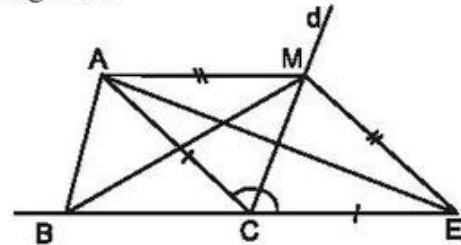


Hình 79

Theo câu a),  $AC$  đối xứng với  $KB$  qua  $d$ , do đó  $AC = KB$ . Hình thang  $AKCB$  có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.

67. (h.80). Gọi  $d$  là đường phân giác của góc ngoài tại  $C$ . Trên tia đối của tia  $CB$  lấy  $E$  sao cho  $CE = CA$ .

Vì  $\triangle ACE$  cân tại  $C$ ,  $d$  là đường phân giác của góc  $ACE$  nên  $d$  là đường trung trực của  $AE$ . Do đó  $MA = ME$ .



Hình 80

$$\text{Ta có : } AC + CB = EC + CB = BE, \quad (1)$$

$$AM + MB = EM + MB, \quad (2)$$

$$\triangle BME \text{ có } BE < EM + MB. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra  $AC + CB < AM + MB$ .

68. Hình nét đậm ở hình 4 có trục đối xứng.

69. Học sinh tự giải.

70. Câu a) đúng, câu b) sai.

71. (h.81).

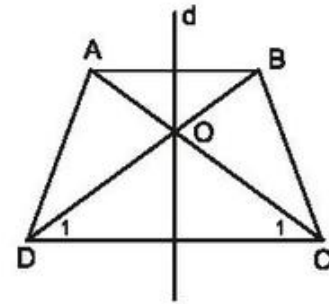
*Cách 1.* Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo  $AC, BD$  của hình thang cân  $ABCD$ .

$$\Delta ADC = \Delta BCD \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$$

$$\Rightarrow \Delta COD \text{ cân tại } O \Rightarrow OC = OD$$

$\Rightarrow O$  thuộc đường trung trực của  $CD$

$\Rightarrow O$  thuộc trục đối xứng của hình thang cân.



Hình 81

*Cách 2.* Hai đường chéo của hình thang cân cắt nhau tại một điểm duy nhất, điểm đó phải nằm trên trục đối xứng của hình.

72. (h.82). *Cách dựng :*

- Dựng  $D$  đối xứng với  $A$  qua  $Ox$ .
- Dựng  $E$  đối xứng với  $A$  qua  $Oy$ .
- $Ox, Oy$  cắt đoạn thẳng  $DE$  ở  $B, C$ .

Tam giác  $ABC$  có chu vi nhỏ nhất.

*Chứng minh :*

Gọi  $B'$  là điểm bất kì trên  $Ox, C'$  là điểm bất kì trên  $Oy$ .

$Ox$  là đường trung trực của  $AD \Rightarrow AB = BD, AB' = B'D$ . Tương tự,  $Oy$  là đường trung trực của  $AE \Rightarrow AC = CE, AC' = C'E$ .

Chu vi  $\Delta ABC$  bằng :

$$AC + CB + BA = EC + CB + BD = ED. \quad (1)$$

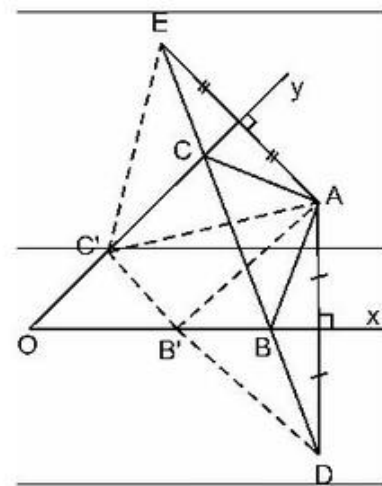
Chu vi  $\Delta AB'C'$  bằng :

$$AC' + C'B' + B'A = EC' + C'B' + B'D. \quad (2)$$

Do  $ED \leq EC' + C'B' + B'D$  nên chu vi  $\Delta ABC \leq$  chu vi  $\Delta AB'C'$ .

(Dấu "=" xảy ra nếu  $C' \equiv C$  và  $B' \equiv B$ ).

*Chú ý.* Do góc  $xOy$  nhọn nên các tia  $Ox, Oy$  luôn cắt đoạn thẳng  $DE$ . Do đó luôn tồn tại các điểm  $B, C$ .



Hình 82

## Bài tập bổ sung

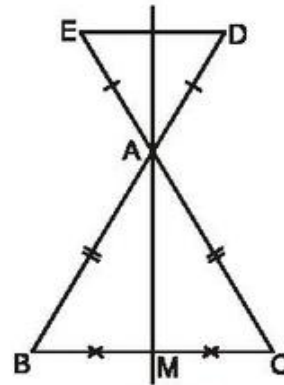
6.1. Nối 1) với C). Nối 2) với A).



- 6.2. (h.bs.10) Tam giác ABC cân tại A có AM là đường trung tuyến nên cũng là đường phân giác.

Đường thẳng MA chứa tia phân giác của góc ở đỉnh của tam giác cân ADE nên là đường trung trực của DE.

Vậy D đối xứng với E qua AM.



Hình bs.10

## §7. Hình bình hành

73. Tứ giác ABCD là hình bình hành vì hai cạnh đối AD, BC song song và bằng nhau.

Tứ giác EFGH là hình bình hành vì các cạnh đối bằng nhau (hoặc vì hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường).

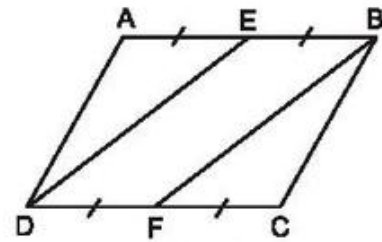
74. (h.83). Cách 1.  $\triangle ADE$  và  $\triangle CBF$  có :

$\widehat{A} = \widehat{C}$  (góc đối hình bình hành),  
 $AD = BC$  (cạnh đối hình bình hành),  
 $AE = CF$  (bằng nửa cạnh đối AB, CD của hình bình hành).

Do đó  $\triangle ADE = \triangle CBF$  (c.g.c), suy ra  $DE = BF$ .

Cách 2. Tứ giác BEDF có :

$BE \parallel DF$  (vì  $AB \parallel CD$ ),  
 $BE = DF$  (bằng nửa cạnh đối AB, CD của hình bình hành),  
 nên BEDF là hình bình hành. Suy ra  $DE = BF$  (cạnh đối).



Hình 83

75. (h.84). Vì  $\widehat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{A}$ ,  $\widehat{C}_2 = \frac{1}{2}\widehat{C}$ , mà  $\widehat{A} = \widehat{C}$  (góc đối hình bình hành)

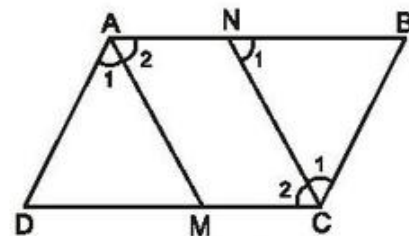
nên  $\widehat{A}_2 = \widehat{C}_2$ . Do

$\widehat{N}_1 = \widehat{C}_2$  (so le trong,  $AB \parallel CD$ ).

Suy ra  $\widehat{A}_2 = \widehat{N}_1$ .

Hai góc  $\widehat{A}_2$ ,  $\widehat{N}_1$  đồng vị nên  $AM \parallel CN$ .

Tứ giác AMCN có  $AN \parallel CM$ ,  $AM \parallel CN$  nên là hình bình hành.



Hình 84

76. (h.85).

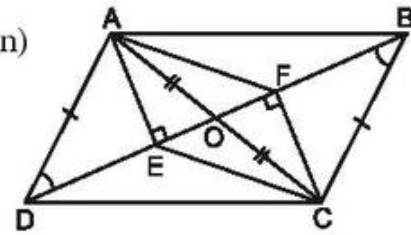
Cách 1.  $\triangle AED = \triangle CFB$  (cạnh huyền - góc nhọn)  
 $\Rightarrow AE = CF$ .

Tứ giác AECF có  $AE \parallel CF$ ,  $AE = CF$   
 nên là hình bình hành.

Cách 2. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

$\triangle AOE = \triangle COF$  (cạnh huyền - góc nhọn)  $\Rightarrow OE = OF$ .

Tứ giác AECF có  $OE = OF$ ,  $OA = OC$  nên là hình bình hành.



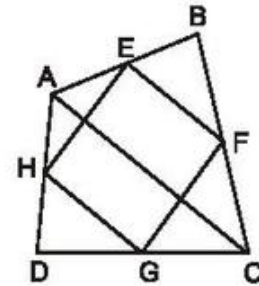
Hình 85

77. (h.86).  $\triangle ABC$  có  $AE = EB$ ,  $BF = FC$  nên EF là  
 đường trung bình. Do đó

$$EF \parallel AC, EF = \frac{AC}{2}. \quad (1)$$

$\triangle ADC$  có  $AH = HD$ ,  $CG = GD$  nên HG là  
 đường trung bình. Do đó

$$HG \parallel AC, HG = \frac{AC}{2}. \quad (2)$$



Hình 86

Từ (1) và (2) suy ra  $EF \parallel HG$ ,  $EF = HG$ . Tứ giác EFGH có hai cạnh đối  
 song song và bằng nhau nên là hình bình hành.

78. (h.87). Vì  $AK = \frac{AB}{2}$ ,  $IC = \frac{CD}{2}$  mà  $AB = CD$  nên  $AK = IC$ .

Tứ giác AKCI có  $AK \parallel IC$ ,  $AK = IC$  nên là  
 hình bình hành. Do đó  $AI \parallel CK$ .

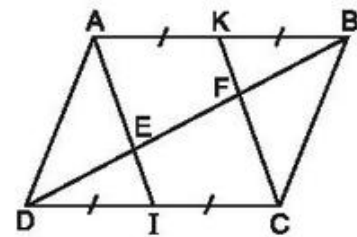
$\triangle DCF$  có  $DI = IC$ ,  $IE \parallel CF$  nên

$$DE = EF. \quad (1)$$

$\triangle ABE$  có  $AK = KB$ ,  $KF \parallel AE$  nên

$$EF = FB. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $DE = EF = FB$ .



Hình 87

79. a)  $\hat{A} = \hat{C} = 110^\circ$ ,  $\hat{B} = \hat{D} = 70^\circ$ .

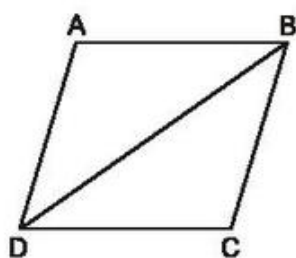
b)  $\hat{A} = \hat{C} = 100^\circ$ ,  $\hat{B} = \hat{D} = 80^\circ$ .

80. Tứ giác ABCD là hình bình hành vì hai cạnh đối AD, BC song song và bằng nhau.

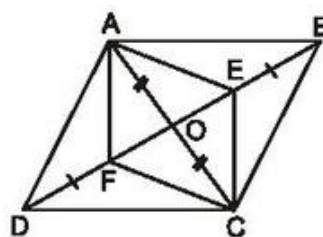
Tứ giác IKMN là hình bình hành vì  $KM \parallel IN$ ,  $IK \parallel MN$  (hoặc vì  $\hat{I} = \hat{M}$ ,  $\hat{K} = \hat{N}$ ).

81. (h.88). Ta có  $AB + AD = \frac{10}{2} = 5(\text{cm})$ ,  
 $AB + AD + BD = 9(\text{cm})$ .

Suy ra  $BD = 9 - 5 = 4(\text{cm})$ .



Hình 88



Hình 89

82. (h.89). Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có  $OA = OC$ ,  $OE = OF$  nên AECF là hình bình hành. Suy ra  $AE \parallel CF$ .

83. (h.90).

a) Tứ giác AECF có  $AE \parallel CF$ ,  $AE = CF$  nên là hình bình hành. Suy ra  $AF \parallel CE$ . Chứng minh tương tự,  $BF \parallel DE$ .

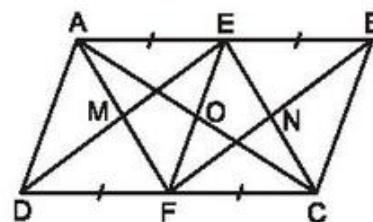
Tứ giác EMFN có  $EM \parallel FN$ ,  $EN \parallel FM$  nên là hình bình hành.

b) Gọi O là giao điểm của AC và EF. Ta sẽ chứng minh MN cũng đi qua O.

AECF là hình bình hành, O là trung điểm của AC nên O là trung điểm của EF.

EMFN là hình bình hành nên đường chéo MN đi qua trung điểm O của EF.

Vậy AC, EF, MN đồng quy tại O.



Hình 90

84. (h.91).

a) Chứng minh rằng  $EG = HF$ ,  $EH = GF$ .

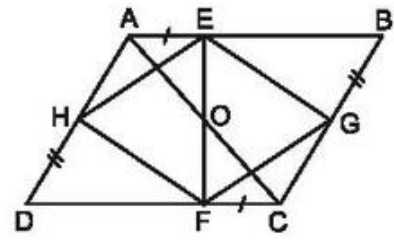
b) Gọi O là giao điểm của AC và EF. Tứ giác AECF có  $AE = CF$ ,  $AE \parallel CF$  nên là hình bình hành.

Suy ra  $O$  là trung điểm của  $AC, EF$ .

$ABCD$  là hình bình hành,  $O$  là trung điểm của  $AC$  nên  $O$  là trung điểm của  $BD$ .

$EGFH$  là hình bình hành,  $O$  là trung điểm của  $EF$  nên  $O$  là trung điểm của  $GH$ .

Vậy  $AC, EF, BD, GH$  đồng quy tại  $O$ .



Hình 91

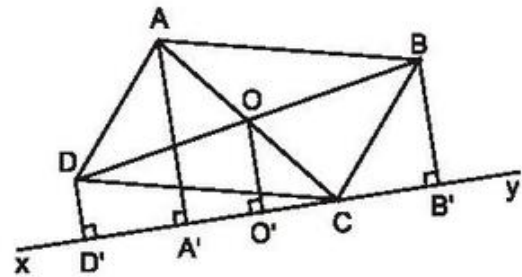
85. (h.92). Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Kẻ  $OO' \perp xy$ .

Hình thang  $DBB'D'$  có  $DO = OB$ ,  $OO' \parallel BB' \parallel DD'$  nên  $OO'$  là đường trung bình và

$$OO' = \frac{BB' + DD'}{2}. \quad (1)$$

$\triangle AA'C$  có  $AO = OC$ ,  $OO' \parallel AA'$  nên  $OO'$  là đường trung bình và

$$OO' = \frac{AA'}{2}. \quad (2)$$



Hình 92

Từ (1) và (2) suy ra  $AA' = BB' + DD'$ .

86. (h.93). Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Kẻ  $OO' \perp xy$ .

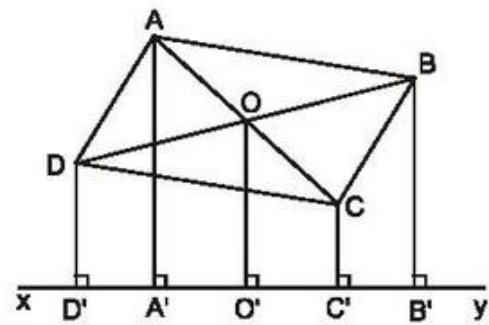
Hình thang  $ACC'A'$  có  $AO = OC$ ,  $OO' \parallel AA' \parallel CC'$  nên  $OO'$  là đường trung bình và

$$OO' = \frac{AA' + CC'}{2}. \quad (1)$$

Hình thang  $BDD'B'$  có  $BO = OD$ ,  $OO' \parallel BB' \parallel DD'$  nên  $OO'$  là đường trung bình và

$$OO' = \frac{BB' + DD'}{2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $AA' + CC' = BB' + DD'$ .



Hình 93

87. (h.94).

$$\begin{aligned} \text{a) } \widehat{EAF} &= 360^\circ - \widehat{BAE} - \widehat{DAF} - \alpha \\ &= 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - \alpha \\ &= 240^\circ - \alpha. \end{aligned}$$



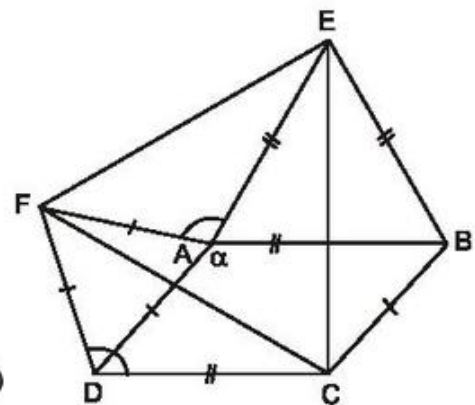
b) Ta có  $\widehat{ADC} = 180^\circ - \alpha$ ,  
 $\widehat{EDF} = \widehat{ADC} + \widehat{ADF} = 180^\circ - \alpha + 60^\circ$   
 $= 240^\circ - \alpha$ .

Suy ra  $\widehat{CDF} = \widehat{EAF}$ .

$\triangle CDF = \triangle EAF$  (c.g.c)  $\Rightarrow CF = EF$ .

Chứng minh tương tự,  $\triangle EBC = \triangle EAF$  (c.g.c)  
 $\Rightarrow EC = EF$ .

Tam giác CEF có  $CF = EF = EC$  nên là tam giác đều.



Hình 94

88. (h.95).

a)  $\widehat{BAC} = \widehat{ADI}$  (cùng bù với  $\widehat{DAE}$ ),

$\triangle BAC = \triangle ADI$  (c.g.c)  $\Rightarrow BC = AI$ .

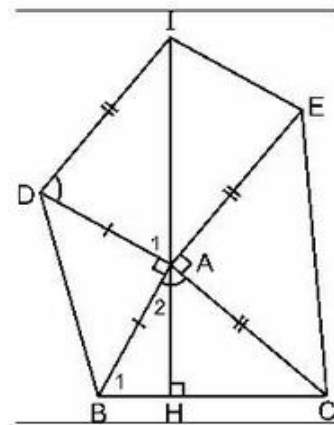
b) Gọi H là giao điểm của IA và BC.

$\triangle BAC = \triangle ADI \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$ .

Ta lại có  $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 90^\circ$

nên  $\widehat{B}_1 + \widehat{A}_2 = 90^\circ$ .

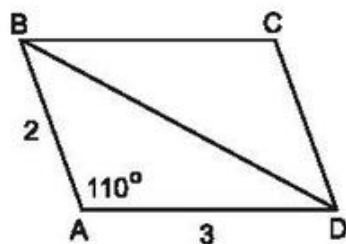
Do đó  $AH \perp BC$ , tức là  $IA \perp BC$ .



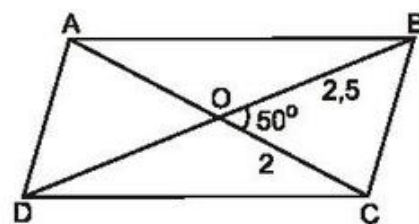
Hình 95

89. a) (h.96). Dựng  $\triangle ABD$  có  $\widehat{A} = 110^\circ$ ,  $AB = 2\text{cm}$ ,  $AD = 3\text{cm}$ .

Sau đó dựng điểm C.



Hình 96



Hình 97

b) (h.97). Dựng  $\triangle BOC$  có  $\widehat{O} = 50^\circ$ ,  $OC = 2\text{cm}$ ,  $OB = 2,5\text{cm}$ .

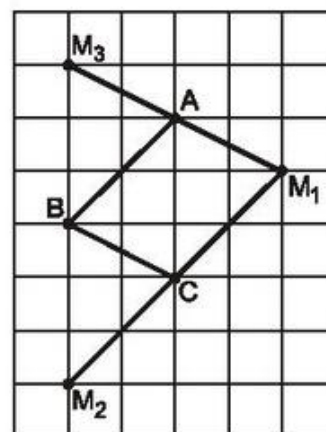
Sau đó dựng các điểm A và D.

90. Điểm thứ tư  $M$  là một trong ba điểm  $M_1, M_2, M_3$  như trên hình 98.

– Với  $AC$  là đường chéo, có hình bình hành  $ABCM_1$ .

– Với  $BC$  là đường chéo, có hình bình hành  $ABM_2C$ .

– Với  $AB$  là đường chéo, có hình bình hành  $ACBM_3$ .



Hình 98

91. (h.99). Phân tích :

Giả sử đã dựng được đường thẳng  $EF \parallel BC$  và  $BE = AF$ .

Kẻ  $FD \parallel AB$ . Khi đó  $BEFD$  là hình bình hành

$\Rightarrow BE = DF$ . Ta lại có  $BE = AF$  nên  $DF = AF$ .

Suy ra  $\triangle AFD$  cân, do đó  $\hat{A}_2 = \hat{D}_1$ .

Ta lại có  $\hat{A}_1 = \hat{D}_1$  (so le trong,  $AB \parallel FD$ ).

Suy ra  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ .

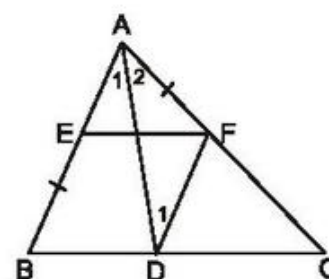
Cách dựng :

– Dựng đường phân giác  $AD$ .

– Qua  $D$  kẻ đường thẳng song song với  $AB$ , cắt  $AC$  ở  $F$ .

– Qua  $F$  kẻ đường thẳng song song với  $BC$ , cắt  $AB$  ở  $E$ .

Chứng minh : Học sinh tự giải.



Hình 99

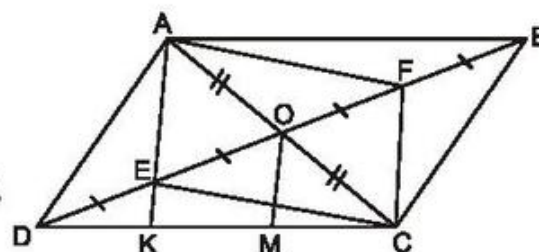
### Bài tập bổ sung

7.1. Chọn (D).

7.2. (h.bs.11)

a) Tứ giác  $AECF$  có  $OA = OC$ ,  
 $OE = OF$  nên là hình bình hành.

Suy ra  $AE \parallel CF$ .



Hình bs.11

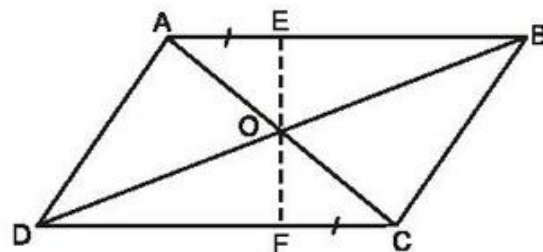
b) Gọi M là trung điểm của KC.

Tam giác ACK có OM là đường trung bình nên  $OM \parallel AK$ .

Tam giác ODM có  $DE = EO$

và  $EK \parallel OM$  nên  $DK = KM = \frac{1}{2} KC$ .

- 7.3. (h.bs.12) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Hãy chứng minh AECF là hình bình hành để suy ra ba điểm E, O, F thẳng hàng.



Hình bs.12

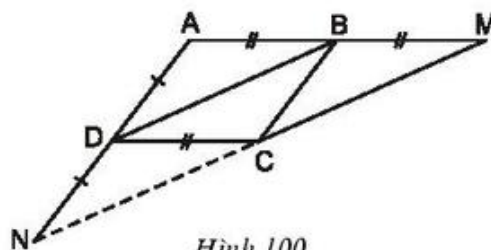
### §8. Đối xứng tâm

92. (h.100). Tứ giác BMCD có  $BM \parallel CD$ ,  $BM = CD$  nên là hình bình hành. Suy ra  $CM \parallel BD$ ,  $CM = BD$ . (1)

Chứng minh tương tự,

$$CN \parallel BD, CN = BD. \quad (2)$$

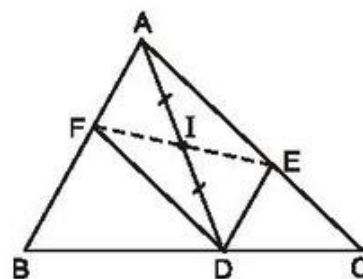
Từ (1) và (2) suy ra M, C, N thẳng hàng và  $CM = CN$ . Do đó M đối xứng với N qua C.



Hình 100

93. (h.101). Tứ giác AEDF có  $AE \parallel DF$ ,  $AF \parallel DE$  nên là hình bình hành.

Hình bình hành AEDF có I là trung điểm của AD nên I cũng là trung điểm của EF. Do đó E đối xứng với F qua I.



Hình 101

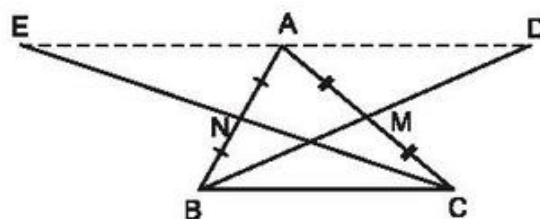
94. (h.102). Tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường :  $MA = MC$ ,  $MB = MD$  nên là hình bình hành.

$$\text{Suy ra } AD \parallel BC, AD = BC. \quad (1)$$

Chứng minh tương tự,

$$AE \parallel BC, AE = BC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra D, A, E thẳng hàng và  $AD = AE$ . Do đó D đối xứng với E qua A.



Hình 102

95. (h.103). Vì  $\triangle ADE$  có  $AB$  là đường trung trực của  $DE$  nên là tam giác cân, và  $AB$  cũng là đường phân giác, do đó :  $AE = AD, \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ .

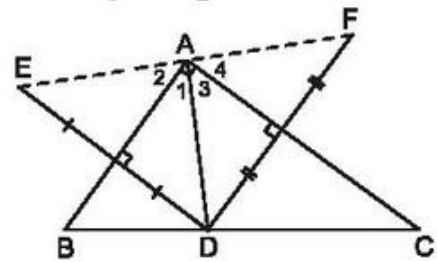
Chứng minh tương tự,  $AF = AD, \widehat{A}_3 = \widehat{A}_4$ .

Suy ra :  $AE = AF$  (cùng bằng  $AD$ ),

$$\widehat{DAE} + \widehat{DAF} = 2(\widehat{A}_1 + \widehat{A}_3)$$

$$= 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ.$$

Do đó  $A$  là trung điểm của  $EF$ , tức là  $E$  và  $F$  đối xứng với nhau qua  $A$ .

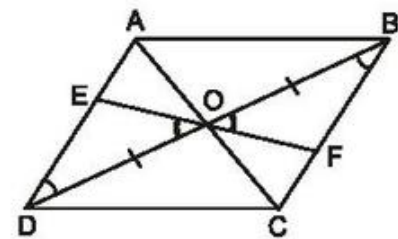


Hình 103

96. (h.104). Vì  $\triangle ODE = \triangle OBF$  (g.c.g)

nên  $OE = OF$ .

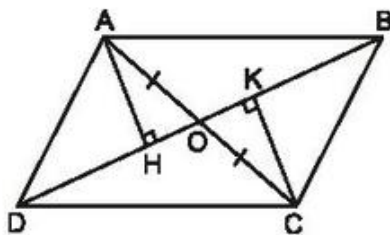
Do  $O$  là trung điểm của  $EF$  nên  $E$  và  $F$  đối xứng với nhau qua  $O$ .



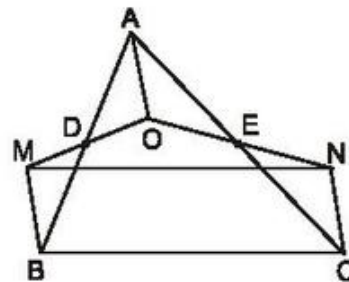
Hình 104

97. (h.105). Chứng minh rằng

$\triangle AOH = \triangle COK$  (cạnh huyền - góc nhọn).



Hình 105



Hình 106

98. (h.106). Tứ giác  $AOBM$  có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành. Suy ra

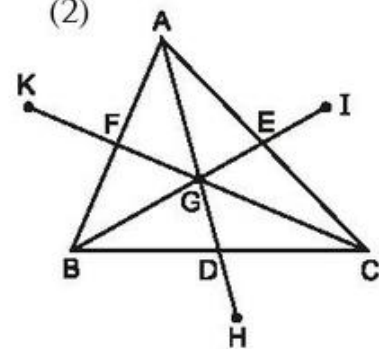
$$BM \parallel OA, BM = OA. \quad (1)$$

Chứng minh tương tự,  $NC \parallel OA, NC = OA. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra  $BM \parallel NC, BM = NC$ .

Vậy  $MNCB$  là hình bình hành.

99. (h.107). Ta có  $GH = GA$  (cùng bằng  $2GD$ ) nên điểm đối xứng với  $A$  qua  $G$  là  $H$ . Tương tự, ta có điểm đối xứng với  $B$  qua  $G$  là  $I$  và điểm đối xứng với  $C$  qua  $G$  là  $K$ .

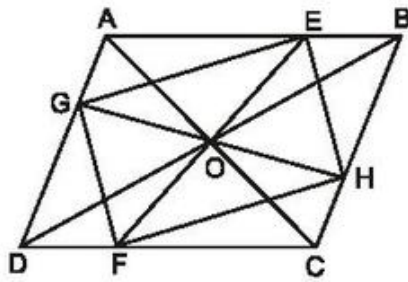


Hình 107

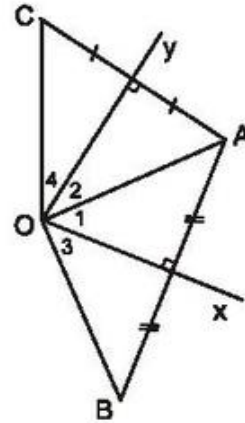


100. (h.108). *HD* :

Chứng minh rằng  $OE = OF$ ,  $OG = OH$ .



Hình 108



Hình 109

101. (h.109).

a) *HD* : Chứng minh rằng  $OB$  và  $OC$  cùng bằng  $OA$ .

b) Ta đã có  $OB = OC$ . Do đó  $B$  đối xứng với  $C$  qua  $O$  nếu có thêm điều kiện  $B, O, C$  thẳng hàng. Ta có  $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_3$ ,  $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_4$  nên :

$$B, O, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow 2\hat{\theta}_1 + 2\hat{\theta}_2 = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 = 90^\circ$$

$$\Leftrightarrow \sphericalangle xOy = 90^\circ.$$

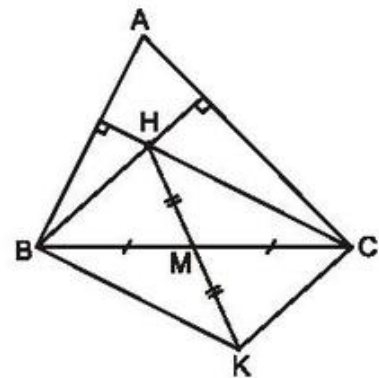
102. (h.110).

Tứ giác  $BHCK$  có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành. Suy ra  $KB \parallel CH$ ,  $KC \parallel BH$ .

Ta có  $KB \parallel CH$ ,  $CH \perp AB$  nên  $KB \perp AB$ .

Do đó  $\sphericalangle ABK = 90^\circ$ .

Chứng minh tương tự,  $\sphericalangle ACK = 90^\circ$ .



Hình 110

103. Hình có tâm đối xứng :

a) Đoạn thẳng  $AB$  (tâm đối xứng là trung điểm của  $AB$ ).

c) Đường tròn tâm  $O$  (tâm đối xứng là tâm  $O$  của đường tròn).

104. (h.111).

a)  $\triangle AOD$  và  $\triangle ABC$  có :

$$AO = AB,$$

$$\hat{O}_1 = \hat{B}_1 \text{ (so le trong, } BC \parallel OD),$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ (đối đỉnh).}$$

Do đó  $\triangle AOD = \triangle ABC$  (g.c.g).

Suy ra  $AD = AC$ . Do A là trung điểm của CD nên C và D đối xứng với nhau qua A.

b) *Cách 1.* Học sinh tự giải theo câu a).

*Cách 2. Cách dựng* (h.112).

– Qua A dựng đường thẳng song song với Ox, cắt Oy ở E.

– Dựng điểm C đối xứng với O qua E.

– CA cắt Ox ở D.

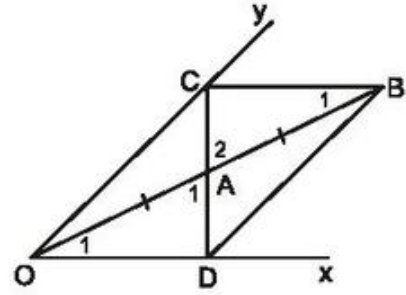
*Chứng minh.* Học sinh tự giải.

105. (h.113). *Cách dựng* :

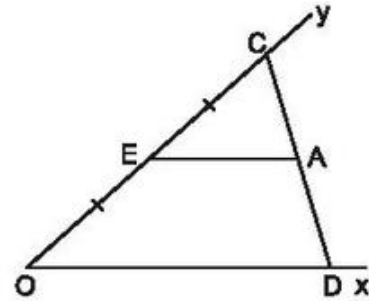
– Qua M dựng đường thẳng song song với AC, cắt AB ở E.

– Qua M dựng đường thẳng song song với AB, cắt AC ở F.

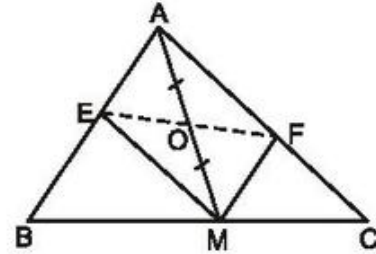
*Chứng minh.* Học sinh tự giải.



Hình 111



Hình 112



Hình 113

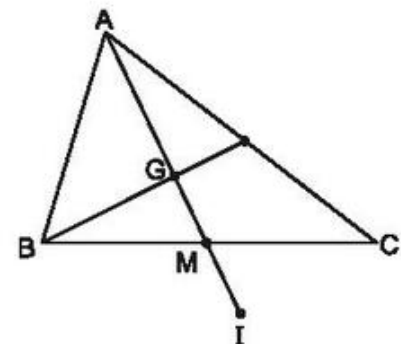
### Bài tập bổ sung

8.1. a) Đúng ; b) Đúng ; c) Sai ; d) Đúng.

8.2. (h.bs.13)

$$MG = \frac{1}{2}GA = \frac{1}{2}GI \text{ nên}$$

$MG = MI$ . Điểm M là trung điểm của GI nên I đối xứng với G qua M.



Hình bs.13

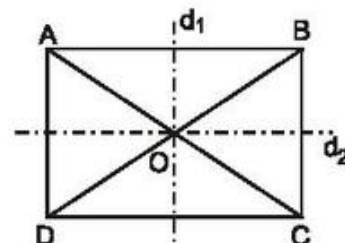
### §9. Hình chữ nhật

106. Theo định lí Py-ta-go :  $d^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 5^2 = 34$  hay

$$d = \sqrt{34} \approx 5,8(\text{cm}).$$

107. (h.114).

a) Ta đã biết, hình bình hành có tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo. Hình chữ nhật cũng là một hình bình hành nên cũng có tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo.



Hình 114

b) Ta đã biết, hình thang cân có trục đối xứng là đường thẳng đi qua trung điểm của hai đáy. Hình chữ nhật ABCD là một hình thang cân có đáy AB, CD nên đường thẳng  $d_1$  đi qua trung điểm của AB, CD là trục đối xứng. Hình chữ nhật ABCD cũng là một hình thang cân có đáy AD, BC nên đường thẳng  $d_2$  đi qua trung điểm của AD, BC cũng là trục đối xứng.

108. Cạnh huyền của tam giác vuông bằng :

$$\sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} \approx 11,2(\text{cm}).$$

Đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng :

$$11,2 : 2 = 5,6(\text{cm}).$$

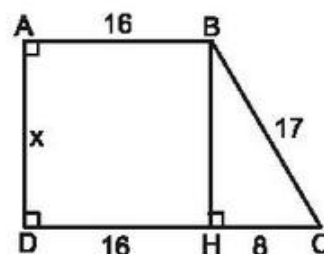
109. (h.115). Kẻ  $BH \perp CD$ . Tứ giác ABHD có ba góc vuông nên là hình chữ nhật. Do đó :  $DH = AB = 16(\text{cm})$ . Suy ra :

$$HC = DC - DH = 24 - 16 = 8(\text{cm}).$$

Xét  $\triangle BHC$  vuông. Theo định lí Py-ta-go :

$$\begin{aligned} BH &= \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} \\ &= \sqrt{225} = 15(\text{cm}). \end{aligned}$$

Vậy  $x = 15(\text{cm})$ .



Hình 115

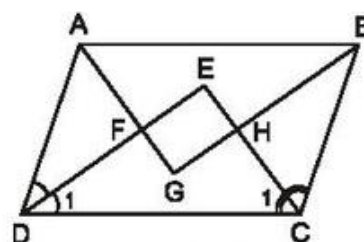
110. Xét tứ giác EFGH tạo bởi các tia phân giác của các góc của hình bình hành ABCD (h.116).

Ta có  $\widehat{C} + \widehat{D} = 180^\circ$  nên  $\widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 = 90^\circ$ .

Do đó  $\widehat{E} = 90^\circ$ .

Chứng minh tương tự,  $\widehat{F} = 90^\circ$ ,  $\widehat{G} = 90^\circ$ .

Tứ giác EFGH có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.



Hình 116

111. (h.117).

$\Delta ABC$  có  $AE = EB, BF = FC$  nên  $EF \parallel AC$ .

Chứng minh tương tự,  $HG \parallel AC$ .

Suy ra  $EF \parallel HG$ . (1)

Chứng minh tương tự,  $EH \parallel FG$ . (2)

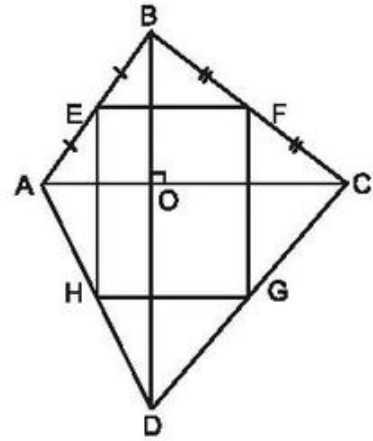
Từ (1) và (2) suy ra  $EFGH$  là hình bình hành.

$EF \parallel AC, BD \perp AC \Rightarrow EF \perp BD$ ,

$EF \perp BD, EH \parallel BD \Rightarrow EF \perp EH$ .

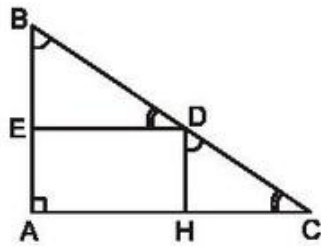
Hình bình hành  $EFGH$  có  $\widehat{E} = 90^\circ$  nên là hình chữ nhật.

Hình 117



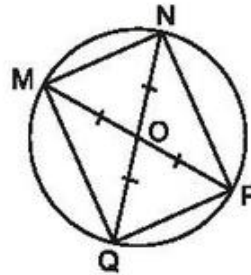
112. (h.118). Tứ giác AEDH là hình bình hành và có một góc vuông nên là hình chữ nhật.

Tứ giác MNPQ có hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình chữ nhật.



a)

Hình 118



b)

113. a) Đúng ;

b) Sai ;

c) Đúng.

114. (h.119).

a) Tứ giác ADME có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

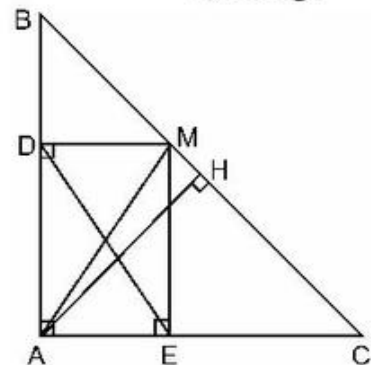
$\Delta DBM$  vuông có  $\widehat{B} = 45^\circ$  nên là tam giác vuông cân. Suy ra  $DM = DB$ .

Chu vi hình chữ nhật ADME bằng :

$$\begin{aligned} 2(AD + DM) &= 2(AD + DB) = 2AB \\ &= 2 \cdot 4 = 8(\text{cm}). \end{aligned}$$

b) Gọi H là trung điểm của BC, ta có  $AH \perp BC$ .

ADME là hình chữ nhật  $\Rightarrow DE = AM$ .



Hình 119



Ta có :  $DE = AM \geq AH$ . Dấu "=" xảy ra khi  $M \equiv H$ .

Vậy  $DE$  có độ dài nhỏ nhất là  $AH$  khi điểm  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

**115.** (h.120).

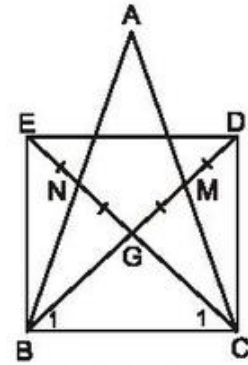
$D$  đối xứng với  $G$  qua  $M \Rightarrow GD = 2GM$ .

$G$  là trọng tâm của  $\Delta ABC \Rightarrow BG = 2GM$ .

Suy ra  $BG = GD$ .

Chứng minh tương tự,  $CG = GE$ .

Tứ giác  $BEDC$  có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.



Hình 120

$\Delta CBM = \Delta BCN$  (c.g.c)  $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow BG = CG \Rightarrow BD = CE$ .

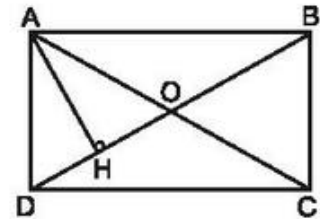
Hình bình hành  $BEDC$  có hai đường chéo bằng nhau nên là hình chữ nhật.

**116.** (h.121). Kẻ đường chéo  $AC$  cắt  $BD$  ở  $O$ ,  $OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4(\text{cm})$ .

Suy ra  $OH = OD - HD = 4 - 2 = 2(\text{cm})$ .

Các hình chiếu  $HD$ ,  $HO$  bằng nhau nên các đường xiên  $AD$ ,  $AO$  bằng nhau

$$\Rightarrow AD = AO = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4(\text{cm}).$$



Hình 121

Xét  $\Delta ABD$  vuông :

$$AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} \approx 7(\text{cm}).$$

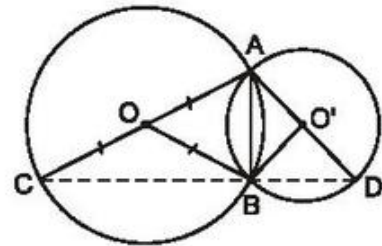
**117.** (h.122).  $OA = OB = OC$  (bán kính)

$\Rightarrow \Delta ABC$  có đường trung tuyến  $BO = \frac{1}{2}AC$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ$ .

Chứng minh tương tự,  $\widehat{ABD} = 90^\circ$ .

Do đó :  $\widehat{ABC} + \widehat{ABD} = 180^\circ \Rightarrow C, B, D$  thẳng hàng.

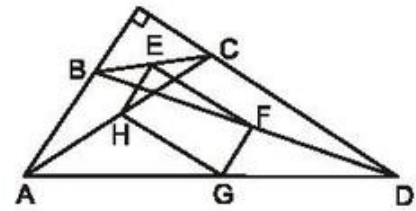


Hình 122

**118.** (h.123). Vì  $HG$  là đường trung bình của  $\Delta ACD$  nên  $HG \parallel CD$ . Tương tự,  $EF$  là đường trung bình của  $\Delta BCD$  nên  $EF \parallel CD$ .

Suy ra  $HG \parallel EF$ . Chứng minh tương tự,  $EH \parallel FG$ . Do đó EFGH là hình bình hành.

Sau đó chứng minh  $EF \perp AB$  và  $EF \perp EH$  để suy ra hình bình hành EFGH là hình chữ nhật. Vậy  $EG = FH$  (tính chất đường chéo hình chữ nhật).



Hình 123

- 119.** (h.124). Vì DE là đường trung bình của  $\triangle ABC$  nên  $DE \parallel BC$ . Do đó DEMH là hình thang. Do DM là đường trung bình của  $\triangle ABC$  nên

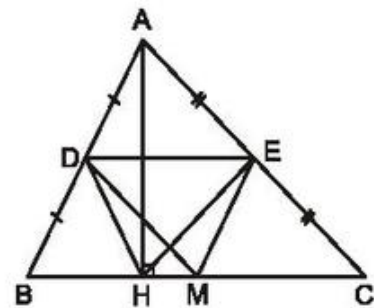
$$DM = \frac{AC}{2}. \quad (1)$$

Ta có  $\triangle AHC$  vuông tại H, HE là đường trung tuyến nên

$$HE = \frac{AC}{2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $DM = HE$ .

Hình thang DEMH có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.



Hình 124

- 120.** (h.125). Vì EF là đường trung bình của  $\triangle BDC$  nên  $EF \parallel DC$ . Do đó AEFG là hình thang.

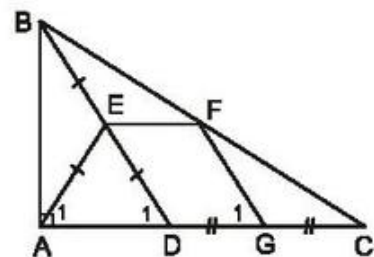
Do FG là đường trung bình của  $\triangle BDC$  nên  $FG \parallel BD$ . Suy ra  $\widehat{G}_1 = \widehat{D}_1$  (đồng vị).

Vì  $\triangle ABD$  vuông tại A, AE là đường trung tuyến nên  $AE = \frac{BD}{2} = ED$ . Do đó  $\triangle AED$

cân tại E. Suy ra  $\widehat{A}_1 = \widehat{D}_1$ .

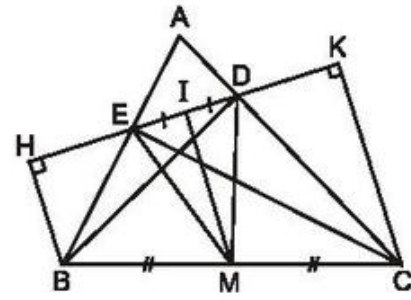
Từ đó  $\widehat{G}_1 = \widehat{A}_1$ . Hình thang AEFG có hai góc kề một đáy bằng nhau nên là hình thang cân.

*Chú ý.* Có thể chứng minh hình thang AEFG có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.



Hình 125

- 121.** (h.126). Gọi M là trung điểm của BC, I là trung điểm của DE. Vì  $\triangle BEC$  vuông tại E, EM là đường trung tuyến nên  $EM = \frac{BC}{2}$ . Tương tự,  $\triangle BDC$  vuông tại D, DM là đường trung tuyến nên  $DM = \frac{BC}{2}$ . Suy ra  $EM = DM$ . Do đó  $\triangle MDE$  cân tại M. Suy ra đường trung tuyến MI là đường cao:  $MI \perp DE$ .



Hình 126

Hình thang BHKC có  $BM = MC$ ,  $MI \parallel BH \parallel CK$  nên  $IH = IK$ .

Do đó  $IH - IE = IK - ID$ , tức là  $EH = DK$ .

- 122.** (h.127).

a) Tứ giác ADHE có ba góc vuông nên là hình chữ nhật. Do đó  $AH = DE$ .

b) Gọi O là giao điểm của AH và DE.

ADHE là hình chữ nhật

$$\Rightarrow OH = OE \Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{H}_1. \quad (1)$$

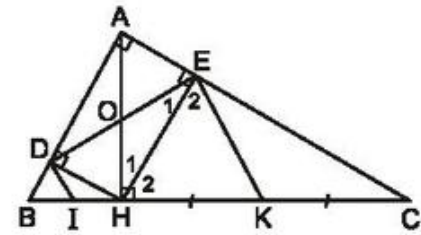
$\triangle EHC$  vuông có EK là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền

$$\Rightarrow HK = EK \Rightarrow \widehat{E}_2 = \widehat{H}_2. \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra

$$\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = \widehat{H}_1 + \widehat{H}_2 = \widehat{AHC} = 90^\circ.$$

Do đó  $\widehat{DEK} = 90^\circ$ . Chứng minh tương tự,  $\widehat{EDI} = 90^\circ$ . Vậy  $DI \parallel EK$ .



Hình 127

- 123.** (h.128).

a) Ta có  $\widehat{A}_1 = \widehat{C}$  (cùng phụ  $\widehat{HAC}$ ).

AM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của  $\triangle ABC \Rightarrow AM = MC$

$$\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{A}_2. \text{ Suy ra } \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2.$$

b) Gọi O là giao điểm của AH và DE, I là giao điểm của AM và DE.

ADHE là hình chữ nhật

$$\Rightarrow OA = OE \Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{OAE}. \quad (1)$$

Ta lại có  $\triangle AHC$  vuông

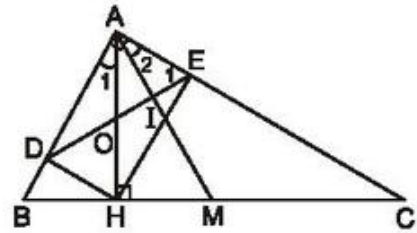
$$\Rightarrow \widehat{C} + \widehat{OAE} = 90^\circ. \quad (2)$$

Ở chứng minh câu a) ta có :

$$\widehat{C} = \widehat{A_2}. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra  $\widehat{E_1} + \widehat{A_2} = 90^\circ$ .

Suy ra  $\widehat{AIE} = 90^\circ$ , tức là  $AM \perp DE$ .



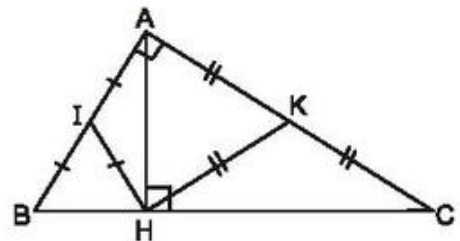
Hình 128

### Bài tập bổ sung

9.1. Chọn (B).

9.2. (h.bs.14)

$$\begin{aligned} \widehat{IHK} &= \widehat{IHA} + \widehat{AHK} \\ &= \widehat{IAH} + \widehat{HAK} = 90^\circ. \end{aligned}$$

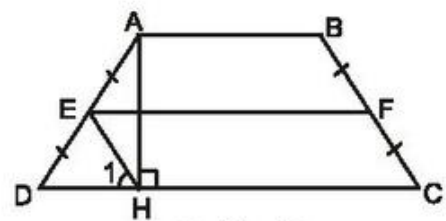


Hình bs.14

9.3. (h.bs.15) HE là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AD nên  $HE = DE$ , suy ra  $\widehat{D} = \widehat{H_1}$ .

Ta lại có  $\widehat{D} = \widehat{C}$  nên  $\widehat{H_1} = \widehat{C}$ , suy ra  $HE \parallel CF$ .

Tứ giác EFCH có  $EF \parallel CH$  và  $HE \parallel CF$  nên là hình bình hành.



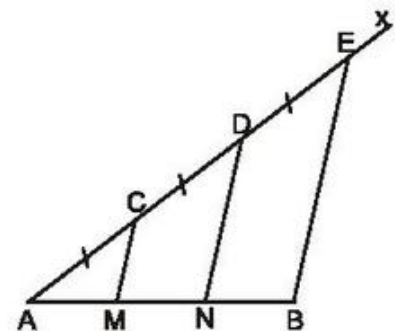
Hình bs.15

## §10. Đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước

124. (h.129).

Cách 1. Dùng tính chất đường trung bình của tam giác và đường trung bình của hình thang.

Cách 2. Ta có  $AC = CD = DE$  và  $CM \parallel DN \parallel EB$  nên theo tính chất các đường thẳng song song cách đều thì  $AM = MN = NB$ .



Hình 129

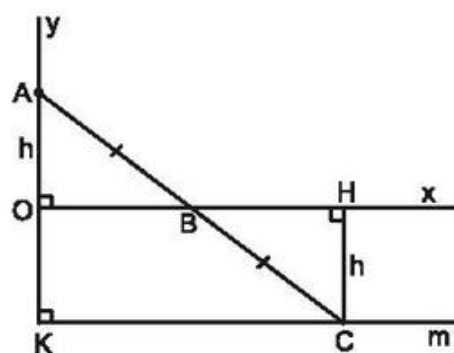
125. (h.130). Kẻ  $CH \perp Ox$ .

$\triangle AOB = \triangle CHB$  (cạnh huyền - góc nhọn)  
 $\Rightarrow AO = CH$ . Đặt  $AO = h$  thì  $CH = h$ .



Điểm C cách đường thẳng Ox cố định khoảng cách h không đổi nên C di chuyển trên đường thẳng song song với Ox và cách Ox một khoảng bằng h.

*Giới hạn* : Khi B trùng O thì C trùng K (K đối xứng với A qua O). Khi điểm B di chuyển trên tia Ox thì điểm C di chuyển trên tia Km song song với Ox và cách Ox một khoảng bằng h.

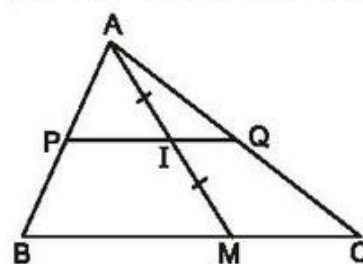


Hình 130

126. (h.131). Qua I kẻ đường thẳng song song với BC, cắt AB và AC theo thứ tự ở P và Q.

$\Delta AMB$  có  $AI = IM$ ,  $IP \parallel BM$  nên P là trung điểm của AB. Chứng minh tương tự, Q là trung điểm của AC.

Các điểm P và Q cố định. Vậy điểm I di chuyển trên đoạn thẳng PQ (P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, AC).



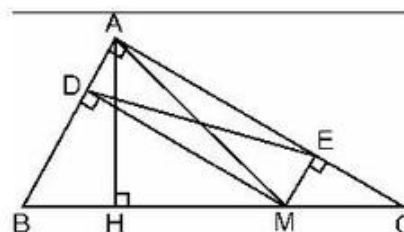
Hình 131

127. (h.132).

a) Tứ giác ADME có ba góc vuông nên là hình chữ nhật. Do đó  $AM = DE$ .

b) Kẻ  $AH \perp BC$ . Ta có  $DE = AM \geq AH$ . Dấu "=" xảy ra khi M trùng H.

Vậy DE có độ dài nhỏ nhất bằng AH khi M là chân đường cao kẻ từ A đến BC.

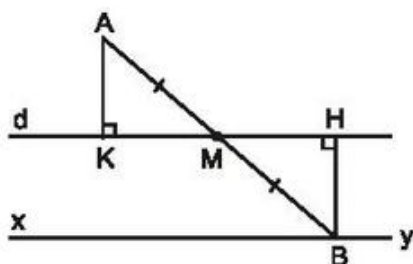


Hình 132

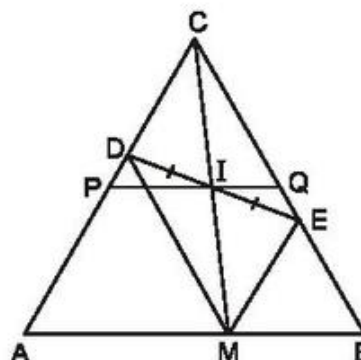
128. (h.133). Kẻ AK, BH vuông góc với d.

$\Delta AKM = \Delta BHM$  (cạnh huyền - góc nhọn)  $\Rightarrow AK = BH$ .

Điểm B cách đường thẳng d cố định một khoảng bằng AK không đổi nên B di chuyển trên đường thẳng xy // d và cách d một khoảng bằng AK.



Hình 133



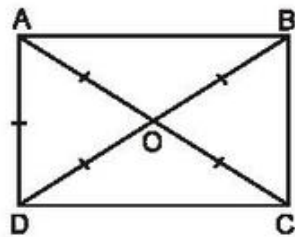
Hình 134

**129.** (h.134). Gọi C là giao điểm của AD và BE. Ta có  $\Delta ABC$  đều và cố định. Vì CDME là hình bình hành, I là trung điểm của DE nên là trung điểm của CM. Từ đó chứng minh được I di chuyển trên đoạn thẳng PQ (P, Q theo thứ tự là trung điểm của AC, BC).

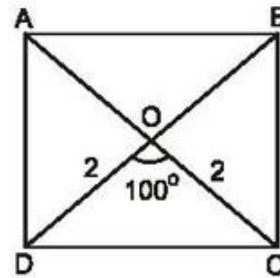
**130.** (h.135). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Ta có  $OA = OD = \frac{1}{2}AC$ .

Theo đề bài  $AD = \frac{1}{2}AC$ . Do đó  $OA = OD = AD$ .

Suy ra  $\Delta AOD$  đều. Vậy  $\widehat{AOD} = 60^\circ$ .



Hình 135



Hình 136

**131.** (h.136). HD : dựng  $\Delta COD$  có  $OC = OD = 2\text{cm}$ ,  $\widehat{COD} = 100^\circ$ . Sau đó dựng các điểm A và B.

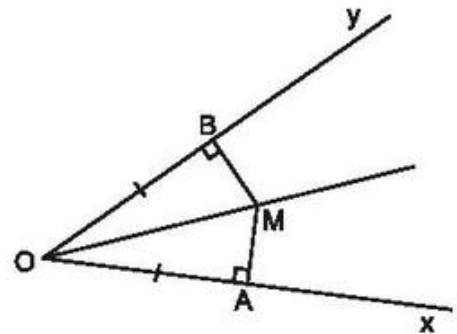
### Bài tập bổ sung

**10.1.** Chọn (B).

**10.2.** (h.bs.16)

$\Delta AOM = \Delta BOM$  (cạnh huyền - cạnh góc vuông) nên  $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ .

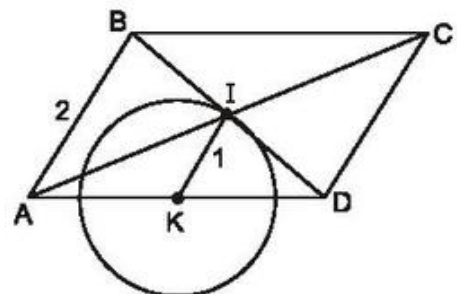
Điểm M chuyển động trên tia phân giác của góc xOy.



Hình bs.16

**10.3.** (h.bs.17) Gọi K là trung điểm của AD thì K là điểm cố định. IK là đường trung bình của  $\Delta ABD$  nên  $IK = \frac{AB}{2} = \frac{2}{2} = 1$  (cm). Điểm

I cách điểm K cố định một khoảng 1 cm nên I chuyển động trên đường tròn (K ; 1 cm).



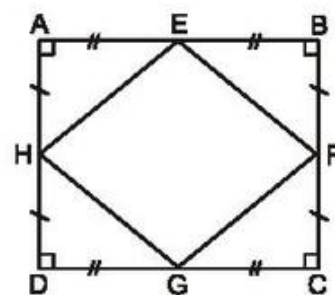
Hình bs.17

**§11. Hình thoi**

**132.** (h.137). Xét hình chữ nhật ABCD có E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

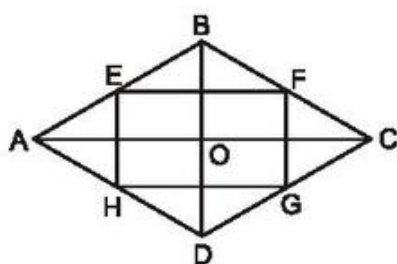
$$\triangle AHE = \triangle BFE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow HE = EF.$$

Chứng minh tương tự,  $EF = FG, FG = GH$ . Tứ giác EFGH có bốn cạnh bằng nhau nên là hình thoi.

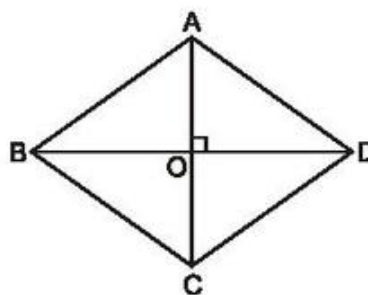


Hình 137

**133.** (h.138). *HD* : Giải tương tự bài 111.



Hình 138



Hình 139

**134.** (h.139).

a) Ta đã biết, hình bình hành có tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo. Hình thoi cũng là một hình bình hành nên cũng có tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo.

b) Vì AC là đường trung trực của BD nên điểm đối xứng với B qua AC là điểm D, điểm đối xứng với A qua AC là chính nó, điểm đối xứng với C qua AC là chính nó. Như vậy, điểm đối xứng với mỗi đỉnh của hình thoi qua AC cũng thuộc hình thoi. Do đó AC là trục đối xứng của hình thoi.

Chứng minh tương tự, BD cũng là trục đối xứng của hình thoi.

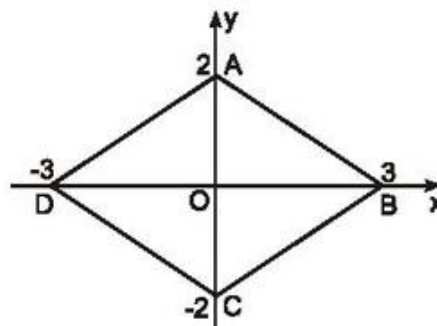
**135.** (h.140).

Tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành, lại có hai đường chéo vuông góc nên là hình thoi.

Cạnh của hình thoi bằng

$$\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

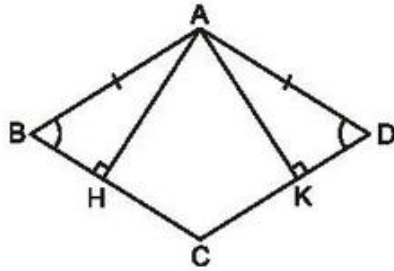
Chu vi của hình thoi bằng  $4\sqrt{13}$ .



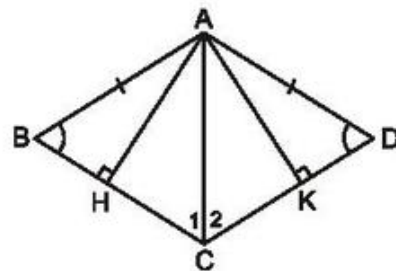
Hình 140



136. a) (h.141).  $\triangle AHB = \triangle AKD$  (cạnh huyền - góc nhọn)  $\Rightarrow AH = AK$ .



Hình 141



Hình 142

b) (h.142).

Cách 1. Chứng minh  $\triangle AHB = \triangle AKD$  để suy ra  $AB = AD$ . Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình thoi.

Cách 2. Chứng minh  $\triangle AHC = \triangle AKC$  để suy ra  $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ .

Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc nên là hình thoi.

137. (h.143).

$\triangle AEB = \triangle CFB$  (cạnh huyền - góc nhọn)  
 $\Rightarrow BE = BF \Rightarrow \triangle BEF$  cân.

Dễ dàng chứng minh được  $\widehat{A}BC = 120^\circ$ ,  
 $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = 30^\circ$ . Do đó  $\widehat{B}_3 = 60^\circ$ .

Vậy  $\triangle BEF$  là tam giác đều.

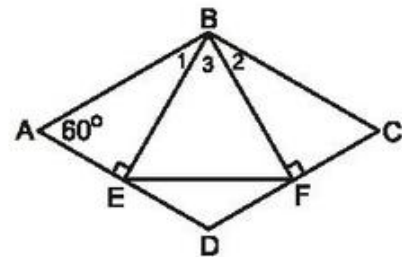
138. (h.144). Ta có  $OE \perp AB$ ,  $OG \perp CD$ , mà  $AB \parallel CD$  nên ba điểm E, O, G thẳng hàng.

Chứng minh tương tự, ba điểm H, O, F thẳng hàng.

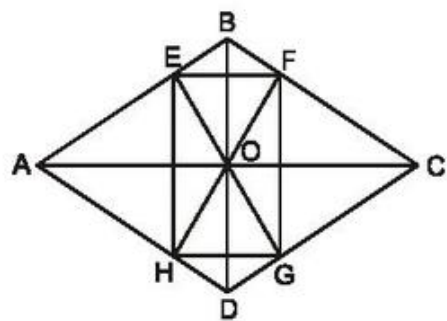
Điểm O thuộc tia phân giác của góc B nên cách đều hai cạnh của góc. Do đó  $OE = OF$ . Chứng minh tương tự,  $OF = OG$ ,  $OG = OH$ .

Tứ giác EFGH có hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình chữ nhật.

139. (h.145). Gọi M là trung điểm của AD, ta có :  $HM = MA = MD = 2\text{cm}$ .



Hình 143

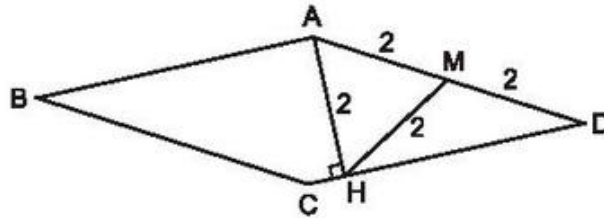


Hình 144

Theo đề bài  $AH = 2\text{cm}$ . Do đó  $\triangle AHM$  là tam giác đều

$$\Rightarrow \widehat{MAH} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{D} = 30^\circ.$$

Từ đó:  $\widehat{B} = \widehat{D} = 30^\circ$ ,  $\widehat{A} = \widehat{C} = 150^\circ$ .



Hình 145

**140.** (h.146). Vì  $\triangle ABD$  cân và có  $\widehat{A} = 60^\circ$  nên là tam giác đều. Suy ra

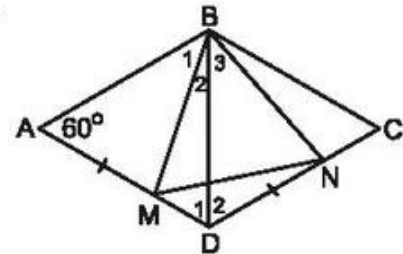
$$AB = BD, \widehat{ABD} = \widehat{D_1} = 60^\circ. \text{ Do đó } \widehat{D_2} = 60^\circ.$$

$$\triangle ABM = \triangle DBN \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow BM = BN, \widehat{B_1} = \widehat{B_3}.$$

$$\text{Ta lại có } \widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 60^\circ \text{ nên } \widehat{B_3} + \widehat{B_2} = 60^\circ.$$

$\triangle BMN$  cân và có  $\widehat{MBN} = 60^\circ$  nên là tam giác đều.



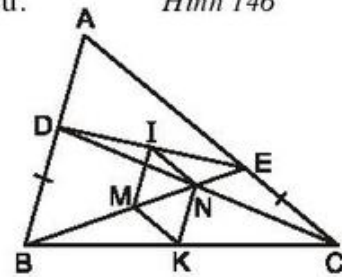
Hình 146

**141.** (h.147).

Áp dụng định lí về đường trung bình của tam giác để chứng minh  $MI = IN = NK = KM$

(cùng bằng  $\frac{BD}{2}$  và  $\frac{CE}{2}$ ).

$MINK$  là hình thoi nên  $IK \perp MN$ .



Hình 147

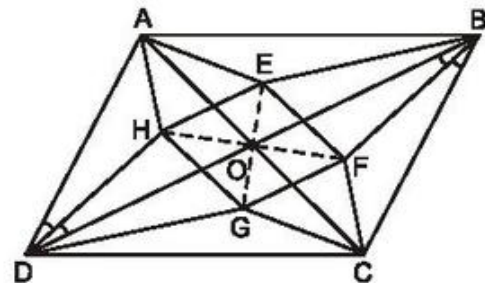
**142.** (h.148). Vì  $OH, OF$  là các tia phân giác của hai góc đối đỉnh  $\widehat{AOD}, \widehat{BOC}$  nên dễ dàng chứng minh được  $H, O, F$  thẳng hàng. Chứng minh tương tự,  $E, O, G$  thẳng hàng.

$\triangle BOF$  và  $\triangle DOH$  có:

$$OB = OD,$$

$$\widehat{OBF} = \widehat{ODH},$$

$$\widehat{BOF} = \widehat{DOH}.$$



Hình 148

Do đó  $\triangle BOF = \triangle DOH$  (g.c.g). Suy ra  $OH = OF$ .

Chứng minh tương tự,  $OE = OG$ . Do đó  $EFGH$  là hình bình hành.

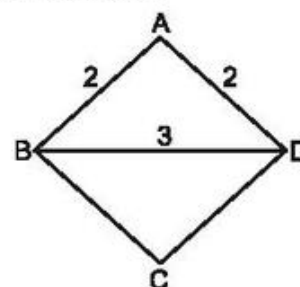
Ta lại có  $OH \perp OE$  (tia phân giác của hai góc kề bù).

Do đó hình bình hành  $EFGH$  là hình thoi.

143. (h.149). *HD* : dựng  $\triangle ABD$ , biết ba cạnh :

$$BD = 3\text{cm}, AB = AD = 2\text{cm}.$$

Sau đó dựng điểm  $C$ .

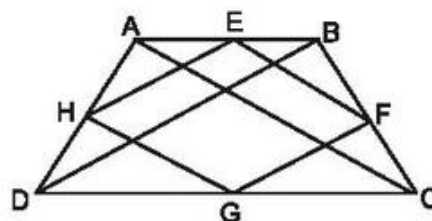


Hình 149

### Bài tập bổ sung

11.1. Chọn (B).

11.2. (h.bs.18)  $EFGH$  là hình thoi. Hãy chứng minh  $EF = FG = GH = HE$ .



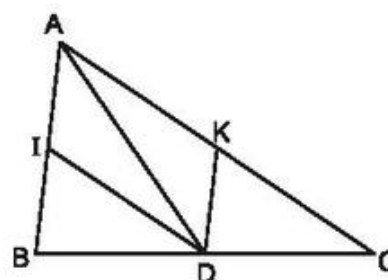
Hình bs.18

11.3. (h.bs.19)

a) Tứ giác  $AIDK$  có  $AI \parallel DK$  và  $AK \parallel DI$  nên là hình bình hành.

b) Hình bình hành  $AIDK$  là hình thoi

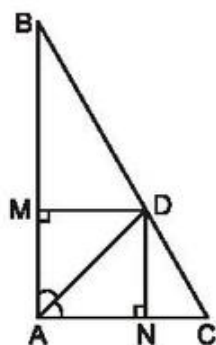
$\Leftrightarrow AD$  là tia phân giác của góc  $A$ .



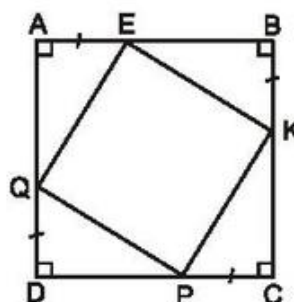
Hình bs.19

### §12. Hình vuông

144. (h.150). Tứ giác  $AMDN$  có ba góc vuông nên là hình chữ nhật. Hình chữ nhật  $AMDN$  có đường chéo  $AD$  là đường phân giác của góc  $A$  nên là hình vuông.



Hình 150

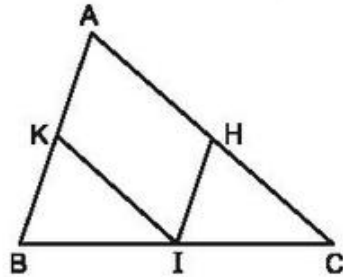


Hình 151

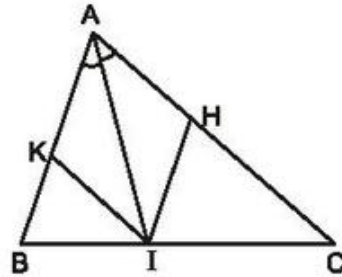
145. (h.151). EKPQ là hình vuông. (HD. Hãy chứng minh rằng  $EK = KP = PQ = QE$  và  $\sphericalangle KEQ = 90^\circ$ ).

146. (h.152).

a) Tứ giác AHİK có  $IH \parallel AK$ ,  $AH \parallel KI$  nên là hình bình hành.



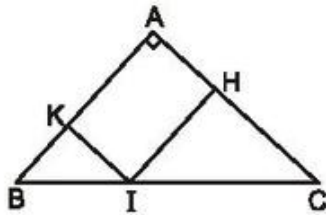
Hình 152



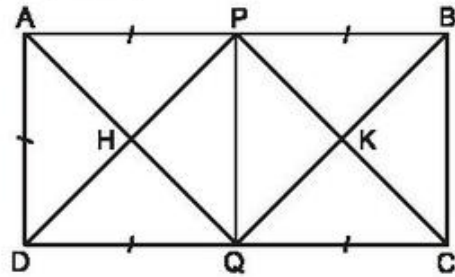
Hình 153

b) Hình bình hành AHİK là hình thoi  $\Leftrightarrow$  AI là đường phân giác của góc A. Vậy nếu I là giao điểm của tia phân giác của góc A với cạnh BC thì AHİK là hình thoi (h.153).

c) Hình bình hành AHİK là hình chữ nhật  $\Leftrightarrow \sphericalangle A = 90^\circ$ . Vậy nếu tam giác ABC vuông tại A thì AHİK là hình chữ nhật (h.154).



Hình 154



Hình 155

147. (h.155). Tứ giác APCQ có  $AP \parallel QC$ ,  $AP = QC$  nên là hình bình hành. Suy ra  $AQ \parallel PC$ . Chứng minh tương tự,  $BQ \parallel PD$ .

Tứ giác PHQK có  $PH \parallel QK$ ,  $PK \parallel QH$  nên là hình bình hành.

Tứ giác APQD có  $AP \parallel DQ$ ,  $AP = DQ$  nên là hình bình hành. Hình bình hành APQD có  $\sphericalangle A = 90^\circ$  nên là hình chữ nhật. Hình chữ nhật APQD có  $AP = AD$  nên là hình vuông. Suy ra  $\sphericalangle PHQ = 90^\circ$  và  $PH = HQ$ .

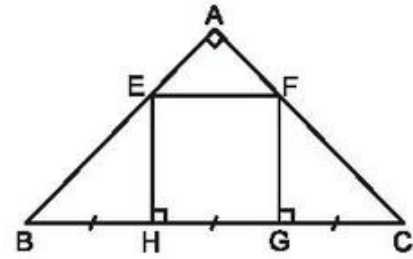
Hình bình hành PHQK có  $\sphericalangle PHQ = 90^\circ$  và  $PH = HQ$  nên dễ dàng chứng minh được đó là hình vuông.

148. (h.156). Tam giác vuông FGC có  $\sphericalangle C = 45^\circ$  nên là tam giác vuông cân. Do đó  $FG = GC$ .



Chứng minh tương tự,  $EH = HB$ . Do  $BH = HG = GC$  nên  $EH = HG = FG$ .

Tứ giác  $EFGH$  có  $EH \parallel FG$ ,  $EH = FG$  nên là hình bình hành. Hình bình hành  $EFGH$  lại có  $\widehat{H} = 90^\circ$ ,  $EH = HG$  nên dễ dàng chứng minh được đó là hình vuông.

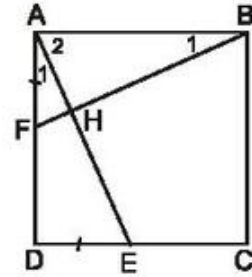


Hình 156

149. (h.157).

$\triangle ADE = \triangle BAF$  (c.g.c)  $\Rightarrow AE = BF$ ,  $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ .

Ta lại có  $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 90^\circ$  nên  $\widehat{B}_1 + \widehat{A}_2 = 90^\circ$ . Gọi  $H$  là giao điểm của  $AE$  và  $BF$ , ta có  $\widehat{H} = 90^\circ$ . Vậy  $AE \perp BF$ .



Hình 157

150. (h.158). Vì  $\triangle FDC$  có  $\widehat{D}_1 = 45^\circ$ ,  $\widehat{C}_1 = 45^\circ$

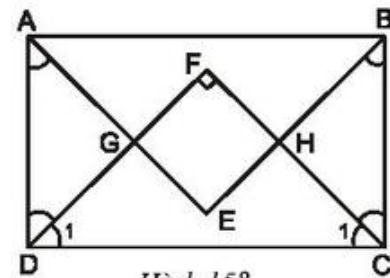
nên  $\widehat{DFC} = 90^\circ$ . Chứng minh tương tự,  $\widehat{E} = 90^\circ$ ,  $\widehat{G} = 90^\circ$ . Tứ giác  $EHFG$  có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

$\triangle AGD = \triangle BHC$  (g.c.g)  $\Rightarrow GD = HC$ .

$\triangle FDC$  cân tại  $F \Rightarrow FD = FC$ .

Suy ra  $FD - GD = FC - HC$ , tức là  $FG = FH$ .

Hình chữ nhật  $EHFG$  có  $FG = FH$  nên là hình vuông.



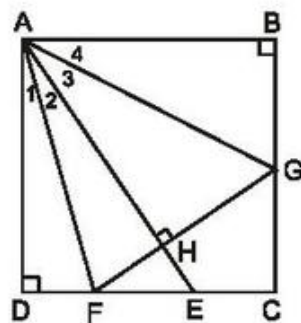
Hình 158

151. (h.159).  $\triangle ADF = \triangle AHF$  (cạnh huyền - góc nhọn)  $\Rightarrow AD = AH$ .

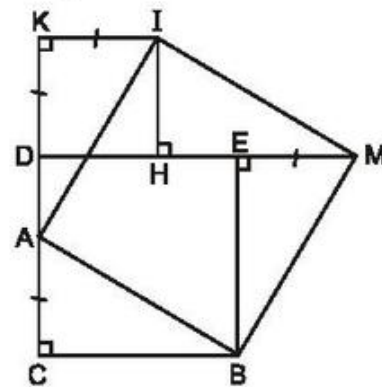
Ta lại có  $AD = AB$  nên  $AB = AH$ .

$\triangle ABG = \triangle AHG$  (cạnh huyền - cạnh góc vuông)  $\Rightarrow \widehat{A}_4 = \widehat{A}_3$ .

Ta có  $\widehat{FAG} = \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = \frac{1}{2}(\widehat{DAH} + \widehat{HAB}) = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$ .



Hình 159



Hình 160

**152.** (h.160). *HD* : Chứng minh các tam giác vuông  $\triangle ACB$ ,  $\triangle IKA$ ,  $\triangle IHM$ ,  $\triangle MEB$  bằng nhau để suy ra  $AB = IA = IM = MB$ . Sau đó chứng minh  $\angle IAB = 90^\circ$ .

**153.** (h.161).

a) Ta có  $\angle EAC = \angle BAH$ ,  $\triangle EAC = \triangle BAH$  (c.g.c). Suy ra  $EC = BH$ ,  $\angle AEC = \angle ABH$ .

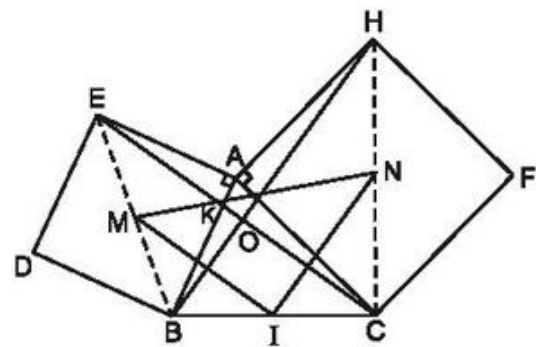
Gọi giao điểm của  $EC$  với  $BA$  và  $BH$  là  $K$  và  $O$ . Xét hai tam giác  $\triangle AEK$  và  $\triangle OBK$ , có  $\angle AEK = \angle OBK$ ,  $\angle AKE = \angle OKB$  nên  $\angle EAK = \angle BOK$ . Do  $\angle EAK = 90^\circ$  nên  $\angle BOK = 90^\circ$ . Vậy  $EC \perp BH$ .

b) Ta có  $MI \parallel EC$ ,  $MI = \frac{EC}{2}$ ,

$IN \parallel BH$ ,  $IN = \frac{BH}{2}$ .

Do  $EC = BH$  nên  $MI = IN$ .

Do  $EC \perp BH$  nên ta chứng minh được  $MI \perp IN$ . Vậy, tam giác  $\triangle MIN$  là tam giác vuông cân.



Hình 161

**154.** (h.162). Để làm xuất hiện tổng  $AK + CE$ , ta lấy điểm  $M$  trên tia đối của tia  $CD$  sao cho  $CM = AK$ . Ta có

$$AK + CE = CM + CE = EM.$$

Cần chứng minh  $EM = BE$ . Ta sẽ chứng minh  $\triangle EBM$  có  $\widehat{M} = \widehat{EBM}$ .

Thật vậy,  $\triangle BAK = \triangle BCM$  (c.g.c)

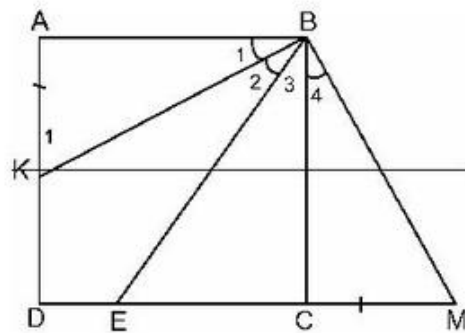
$$\Rightarrow \widehat{K}_1 = \widehat{M}, \widehat{B}_1 = \widehat{B}_4.$$

Ta lại có  $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$  nên  $\widehat{B}_2 = \widehat{B}_4$ . Từ đó,

$$\widehat{EBM} = \widehat{B}_3 + \widehat{B}_4 = \widehat{B}_3 + \widehat{B}_2 = \widehat{KBC} = \widehat{K}_1 = \widehat{M}.$$

$\triangle EBM$  cân  $\Rightarrow BE = ME$ .

Do đó  $BE = MC + CE = AK + CE$ .



Hình 162



155. (h.163).

a)  $\triangle CBE = \triangle DCF$  (c.g.c)  $\Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1$ .

Ta lại có  $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 90^\circ$  nên  $\hat{D}_1 + \hat{C}_2 = 90^\circ$ .

Suy ra  $CE \perp DF$ .

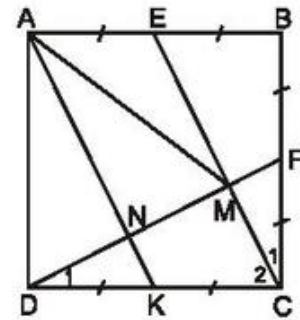
b) Gọi K là trung điểm của CD. Tứ giác AECK có  $AE \parallel CK$ ,  $AE = CK$  nên là hình bình hành. Suy ra  $AK \parallel CE$ .

Gọi N là giao điểm của AK và DF.

Tam giác DCM có  $DK = KC$ ,  $KN \parallel CM$  nên N là trung điểm của DM.

Ta có  $CM \perp DM$  (câu a),  $KN \parallel CM$  nên  $KN \perp DM$ .

Tam giác ADM có AN là đường cao và đường trung tuyến nên là tam giác cân. Do đó  $AM = AD$ .



Hình 163

156. (h.164).

a)  $HD : \triangle EDC = \triangle FAD$  (g.c.g).

Hãy chứng minh  $\triangle DEF$  cân và có  $\hat{EDF} = 60^\circ$  để suy ra  $\triangle DEF$  đều.

b) Ta có  $\hat{AFD} = 150^\circ$ ,  $\hat{DFE} = 60^\circ$  nên

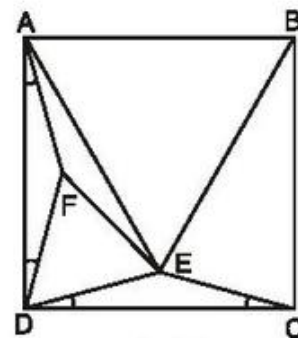
$$\hat{AFE} = 360^\circ - (150^\circ + 60^\circ) = 150^\circ.$$

Ta lại có  $FD = FE$ , từ đó

$$\triangle AFE = \triangle AFD$$
 (c.g.c). Suy ra  $AE = AD$ .

Chứng minh tương tự,  $BE = BC$ .

Tam giác ABE có  $AE = AB = BE$  nên là tam giác đều.



Hình 164

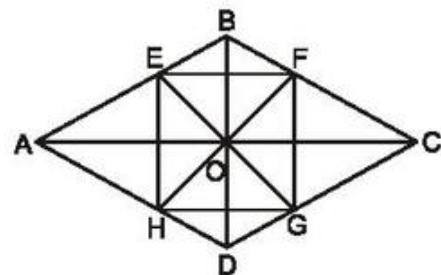
### Bài tập bổ sung

12.1. Chọn (C).

12.2. (h.bs.20)

$$\triangle BOE = \triangle BOF$$
 (g.c.g) nên  $OE = OF$ .

Ta lại có  $OE \perp OF$  (tia phân giác của hai góc kề bù). Suy ra  $\triangle EOF$  vuông cân tại O.



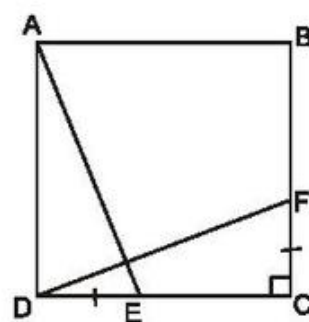
Hình bs.20

Tương tự các tam giác FOG, GOH, HOE vuông cân tại O. Từ đó chứng minh EFGH là hình vuông.

**12.3.** (h.bs.21)

$\triangle ADE = \triangle DCF$  (c.g.c), suy ra  $AE = DF$   
và  $\widehat{DAE} = \widehat{CDF}$ .

Ta lại có  $\widehat{CDF} + \widehat{ADF} = 90^\circ$  nên  
 $\widehat{DAE} + \widehat{ADF} = 90^\circ$ . Do đó  $AE \perp DF$ .



Hình bs.21

### Bài tập ôn chương I

**157.** (h.165). Dễ dàng chứng minh EFGH là hình bình hành có  $EH \parallel BD$ ,

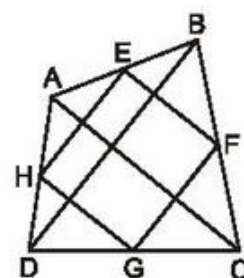
$$EH = \frac{BD}{2}, EF \parallel AC, EF = \frac{AC}{2}.$$

a) EFGH là hình chữ nhật  $\Leftrightarrow EH \perp EF$

$$\Leftrightarrow BD \perp AC.$$

b) EFGH là hình thoi  $\Leftrightarrow EH = EF \Leftrightarrow BD = AC$ .

c) EFGH là hình vuông  $\Leftrightarrow BD \perp AC$  và  $BD = AC$ .



Hình 165

**158.** (h.166).

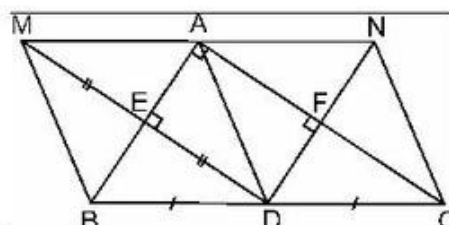
a) Tứ giác AEDF là hình chữ nhật. Học sinh tự giải thích.

b)  $\triangle ABC$  có  $BD = DC$ ,  $DE \parallel AC$  nên  $AE = BE$ .

Ta lại có  $DE = EM$  (D đối xứng với M qua AB).

Tứ giác ADBM có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành. Hình bình hành ADBM có hai đường chéo vuông góc  $AB \perp DM$  nên là hình thoi.

Chứng minh tương tự, ADCN là hình thoi.



Hình 166

c)  $ADBM$  là hình thoi  $\Rightarrow AM \parallel BD \Rightarrow AM \parallel BC$ .

Chứng minh tương tự,  $AN \parallel BC$ .

Qua A ta có  $AM \parallel BC$ ,  $AN \parallel BC$  nên M, A, N thẳng hàng. (1)

Ta lại có  $AM = BD$ ,  $AN = DC$  mà  $BD = DC$  nên  $AM = AN$ . (2)

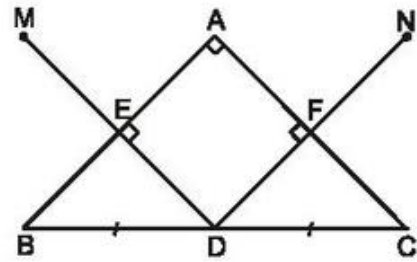
Từ (1) và (2) suy ra A là trung điểm của MN, do đó M đối xứng với N qua A.

d) Hình chữ nhật AEDF là hình vuông  
 $\Leftrightarrow AE = AF$ .

Ta lại có  $AE = \frac{1}{2}AB$ ,  $AF = \frac{1}{2}AC$  nên

$AE = AF \Leftrightarrow AB = AC$ .

Vậy, nếu  $\triangle ABC$  vuông cân tại A thì AEDF là hình vuông (h.167).



Hình 167

**159.** (h.168).

a) AB là đường trung trực của HD  $\Rightarrow AD = AH$ .

Chứng minh tương tự,  $AE = AH$ .

Suy ra  $AD = AE$ .

Tam giác AHD cân nên  $\widehat{HAD} = 2\widehat{A}_1$ .

Chứng minh tương tự,  $\widehat{HAE} = 2\widehat{A}_2$ .

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \widehat{HAD} + \widehat{HAE} &= 2\widehat{A}_1 + 2\widehat{A}_2 = 2(\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2) \\ &= 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ. \end{aligned}$$

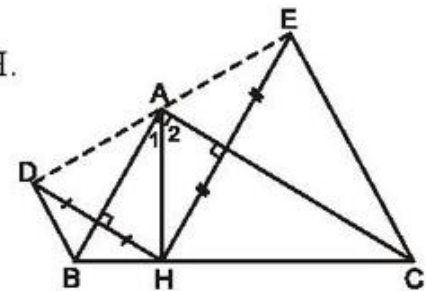
Do đó D, A, E thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) suy ra A là trung điểm của DE. Vậy D đối xứng với E qua A.

b) Tam giác DHE có HA là đường trung tuyến và  $HA = \frac{1}{2}DE$  nên  $\triangle DHE$  vuông tại H.

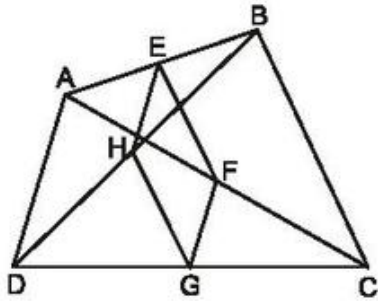
c) Hãy chứng minh  $\widehat{ADB} = \widehat{AHB} = 90^\circ$ ,  $\widehat{AEC} = 90^\circ$  để suy ra BDEC là hình thang vuông.

d) Hãy chứng minh  $BD = BH$ ,  $CE = CH$ .

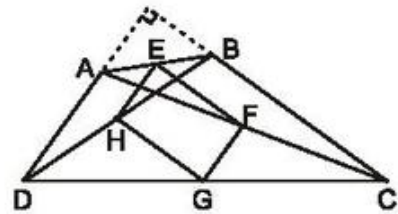


Hình 168

160. (h.169). Dễ dàng chứng minh được EFGH là hình bình hành có  $EH \parallel AD$ ,  
 $EH = \frac{AD}{2}$ ,  $EF \parallel BC$ ,  $EF = \frac{BC}{2}$ .

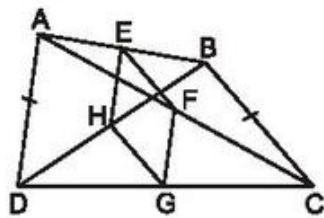


Hình 169

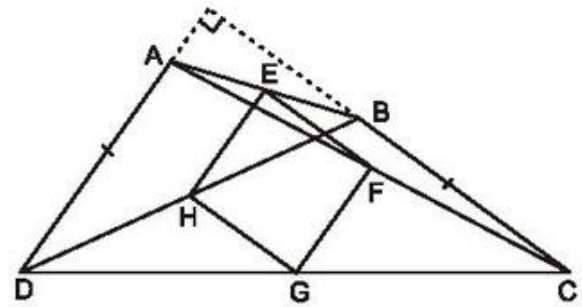


Hình 170

- a) EFGH là hình chữ nhật  $\Leftrightarrow EH \perp EF \Leftrightarrow AD \perp BC$  (h.170).  
 b) EFGH là hình thoi  $\Leftrightarrow EH = EF \Leftrightarrow AD = BC$  (h.171).



Hình 171



Hình 172

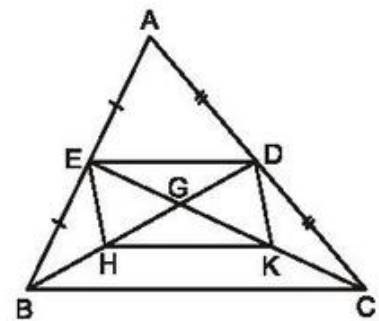
- c) EFGH là hình vuông  $\Leftrightarrow AD \perp BC$  và  $AD = BC$  (h.172).

161. (h.173).

a) Ta có  $EG = GK$  (cùng bằng  $\frac{1}{2}CG$ ),

$$DG = GH \text{ (cùng bằng } \frac{1}{2}BG)$$

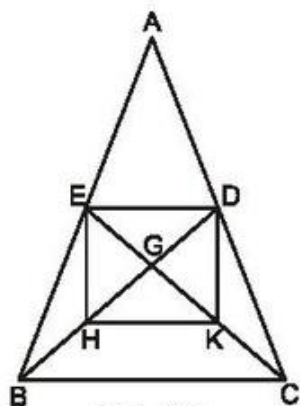
nên tứ giác DEHK là hình bình hành (các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường).



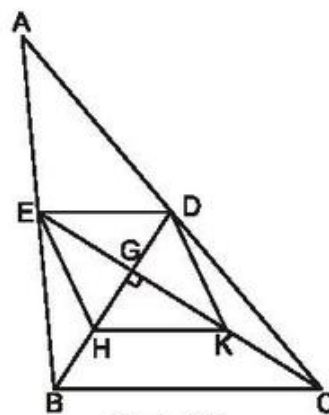
Hình 173



- b) Hình bình hành DEHK là hình chữ nhật  $\Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow HD = EK \Leftrightarrow GE = GD$  và  $GH = GK$   
 $\Leftrightarrow \triangle GEB = \triangle GDC$  (c.g.c)  
 $\Leftrightarrow BE = CD \Leftrightarrow \triangle ABC$  cân tại A (h.174).



Hình 174



Hình 175

- c) Nếu  $BD \perp CE$  thì hình bình hành DEHK có hai đường chéo vuông góc nên là hình thoi (h.175).

**162.** (h.176).

- a) Tứ giác AEFD là hình thoi, tứ giác AECF là hình bình hành. Học sinh tự chứng minh.

- b) Tứ giác AECF là hình bình hành nên  $EN \parallel FM$ . Chứng minh tương tự,  $EM \parallel FN$ . Do đó EMFN là hình bình hành.

AEFD là hình thoi nên  $AF \perp DE$ .

Hình bình hành EMFN có  $\widehat{M} = 90^\circ$  nên là hình chữ nhật.

- c) Hình chữ nhật EMFN là hình vuông

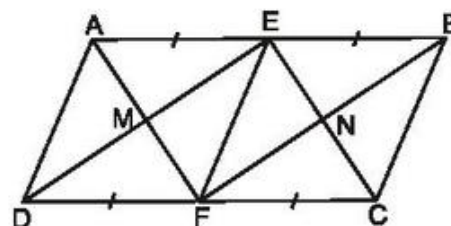
$\Leftrightarrow ME = MF \Leftrightarrow DE = AF$  (vì  $DE = 2ME$ ,  $AF = 2MF$ )

$\Leftrightarrow$  hình thoi AEFD có hai đường chéo bằng nhau

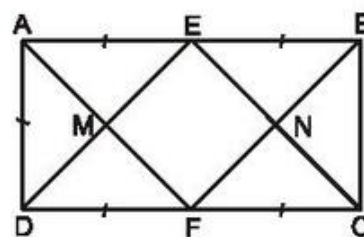
$\Leftrightarrow$  AEFD là hình vuông  $\Leftrightarrow \widehat{A} = 90^\circ$ .

$\Leftrightarrow$  hình bình hành ABCD là hình chữ nhật.

Như vậy, hình chữ nhật EMFN là hình vuông nếu ABCD là hình chữ nhật (h.177, chú ý vẫn có điều kiện  $AB = 2AD$ ).



Hình 176

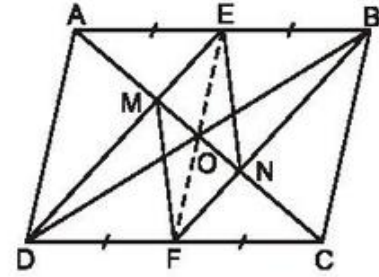


Hình 177

163. (h.178).

a) Tứ giác DEBF là hình bình hành. Học sinh tự chứng minh.

b) Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành ABCD, ta có O là trung điểm của BD.



Hình 178

Theo câu a), DEBF là hình bình hành nên trung điểm O của BD cũng là trung điểm của EF.

Vậy AC, BD, EF cùng cắt nhau tại điểm O.

c)  $\triangle ABD$  có các đường trung tuyến AO, DE cắt nhau ở M nên  $OM = \frac{1}{3}OA$ .

Chứng minh tương tự,  $ON = \frac{1}{3}OC$ . Ta có  $OA = OC$  nên  $OM = ON$ .

Tứ giác EMFN có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường  $OM = ON$ ,  $OE = OF$  nên là hình bình hành.

164. (h.179).

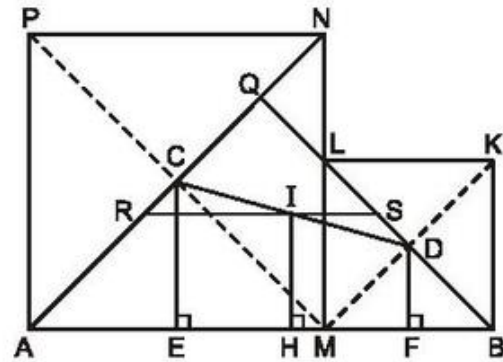
a) Kẻ CE, IH, DF vuông góc với AB.

Ta chứng minh được

$$CE = \frac{AM}{2}, \quad DF = \frac{MB}{2},$$

$$CE + DF = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$$

nên  $IH = \frac{a}{4}$ .



Hình 179

b) Khi điểm M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì I di chuyển trên đoạn thẳng RS song song với AB và cách AB một khoảng bằng  $\frac{a}{4}$  (R là trung điểm của AQ, S là trung điểm của BQ, Q là giao điểm của BL và AN).



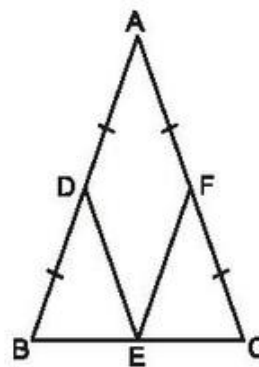
### Bài tập bổ sung

- I.1. a) hình bình hành ;  
b) hình chữ nhật ;  
c) hình thoi.

I.2. (h.bs.22)

a) Tứ giác ADEF có bốn cạnh bằng nhau nên là hình thoi.

b) Hình thoi ADEF là hình vuông  $\Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta ABC$  vuông cân tại A.



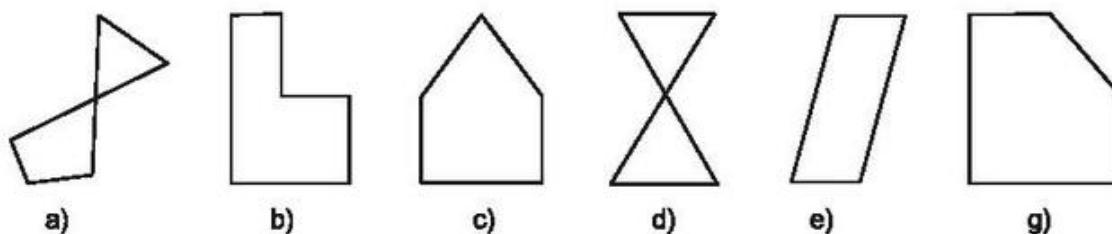
Hình bs.22

## Chương II ĐA GIÁC. DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

### ĐỀ BÀI

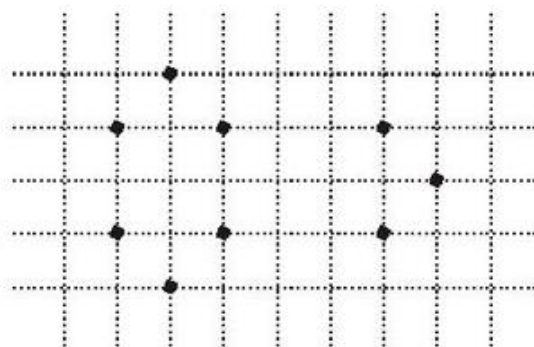
#### §1. Đa giác. Đa giác đều

1. Trong các hình dưới đây (h.180), hình nào là đa giác lồi ? Vì sao ?



Hình 180

2. Hãy vẽ một số đa giác (lồi) mà các đỉnh là một số điểm trong các điểm đã cho ở hình 181 (trên lưới kẻ ô vuông).



3. Em hãy kể tên một số đa giác đều mà em biết.

Hình 181

4. Chứng minh rằng số đo góc của hình  $n$ -giác đều là  $\frac{(n - 2).180^\circ}{n}$ .
5. Tính số đo góc của hình 8 cạnh đều, 10 cạnh đều, 12 cạnh đều.
6. a) Vẽ hình và tính số đường chéo của ngũ giác, lục giác.  
b) Chứng minh rằng hình  $n$ -giác có tất cả  $\frac{n(n - 3)}{2}$  đường chéo.
7. Tìm số đường chéo của hình 8 cạnh, 10 cạnh, 12 cạnh.
8. Chứng minh rằng tổng các góc ngoài của một đa giác (lồi) có số đo là  $360^\circ$ .
9. Đa giác nào có tổng số đo các góc (trong) bằng tổng số đo các góc ngoài ?
10. Một đa giác (lồi) có nhiều nhất là bao nhiêu góc nhọn ?
11. Một đa giác đều có tổng số đo tất cả các góc ngoài và một góc trong của đa giác bằng  $468^\circ$ . Hỏi đa giác đều đó có mấy cạnh ?

### Bài tập bổ sung

- 1.1. Mỗi câu sau đây đúng hay sai ?
  - a) Tam giác và tứ giác không phải là đa giác.
  - b) Hình gồm  $n$  đoạn thẳng đôi một có một điểm chung được gọi là đa giác (với  $n$  là số tự nhiên lớn hơn 2).
  - c) Hình gồm  $n$  đoạn thẳng ( $n$  là số tự nhiên lớn hơn 2) trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào có một điểm chung cũng không cùng nằm trên một đường thẳng được gọi là đa giác.
  - d) Hình tạo bởi nhiều hình tam giác được gọi là đa giác.
  - e) Đa giác luôn nằm trong nửa mặt phẳng cho trước được gọi là đa giác lồi.
  - f) Đa giác luôn nằm trong nửa mặt phẳng có bờ là một đường thẳng chứa một cạnh của nó được gọi là đa giác lồi.
  - g) Hình gồm hai đa giác lồi cho trước là một đa giác lồi.
- 1.2. a) Cho tam giác đều ABC. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh MNP là tam giác đều.  
b) Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N, P, Q tương ứng là trung điểm của các cạnh BC, CD, DA, AB. Chứng minh MNPQ là hình vuông (tứ giác đều).  
c) Cho ngũ giác đều ABCDE. Gọi M, N, P, Q, R tương ứng là trung điểm của các cạnh BC, CD, DE, EA, AB. Chứng minh MNPQR là ngũ giác đều.

- 1.3.** Cho hình vuông ABCD có  $AB = 3\text{cm}$ .  
 Trên tia đối của tia BA lấy điểm K sao cho  $BK = 1\text{cm}$ .  
 Trên tia đối của tia CB lấy điểm L sao cho  $CL = 1\text{cm}$ .  
 Trên tia đối của tia DC lấy điểm M sao cho  $MD = 1\text{cm}$ .  
 Trên tia đối của tia AD lấy điểm N sao cho  $NA = 1\text{cm}$ .  
 Chứng minh KLMN là hình vuông.

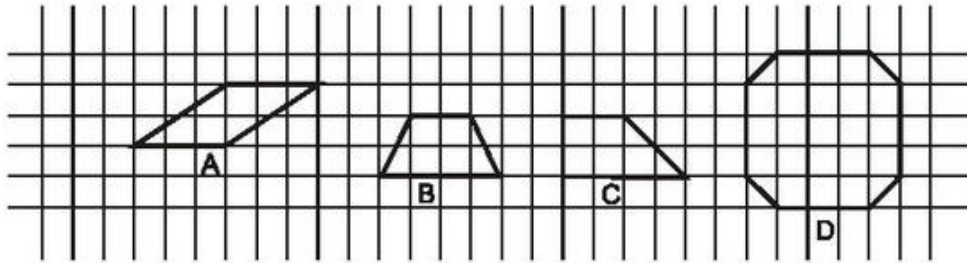
## §2. Diện tích hình chữ nhật

- 12.** Diện tích hình chữ nhật thay đổi như thế nào nếu :
- Chiều dài tăng 3 lần, chiều rộng không thay đổi ?
  - Chiều rộng giảm 2 lần, chiều dài không thay đổi ?
  - Chiều dài và chiều rộng đều tăng 4 lần ?
  - Chiều dài tăng 4 lần, chiều rộng giảm 3 lần ?
- 13.** Cho hình chữ nhật có diện tích là 20 (đơn vị diện tích) và hai kích thước là  $x$  và  $y$  (đơn vị dài).
- Hãy điền vào ô trống trong bảng sau

x	1		4		8		20
y		10		4		2	

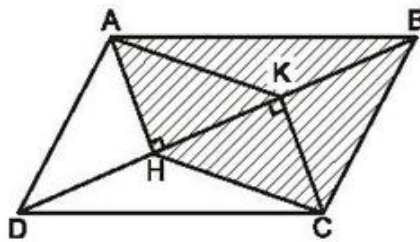
- Theo bảng vừa thành lập, hãy biểu diễn bảy điểm của đồ thị hàm số  $y = \frac{20}{x}$  trên hệ trục tọa độ  $xOy$ .
- 14.**
- Diện tích của hình chữ nhật tăng bao nhiêu phần trăm nếu mỗi cạnh tăng 10% ?
  - Diện tích của hình chữ nhật giảm bao nhiêu phần trăm nếu mỗi cạnh giảm 10% ?
- 15.** Diện tích hình chữ nhật bằng  $48\text{cm}^2$ , một cạnh của nó có độ dài 8cm. Đường thẳng song song với một trong các cạnh của hình chữ nhật chia hình chữ nhật đó thành hai hình chữ nhật bằng nhau. Tính chu vi của mỗi hình chữ nhật được tạo thành.
- 16.** Tính các cạnh của một hình chữ nhật, biết rằng bình phương của độ dài một cạnh là 16(cm) và diện tích của hình chữ nhật là  $28\text{cm}^2$ .
- 17.** Tính các cạnh của một hình chữ nhật, biết tỉ số các cạnh là  $\frac{4}{9}$  và diện tích của nó là  $144\text{cm}^2$ .

18. Cho tam giác vuông cân, biết độ dài cạnh huyền là  $l$ . Tính diện tích tam giác đó.
19. Tính diện tích các hình trên hình 182 (mỗi ô vuông là một đơn vị diện tích).  
Hãy giải thích vì sao tính được như vậy.

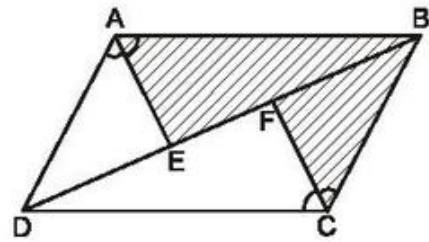


Hình 182

20. Trên giấy kẻ ô vuông, hãy vẽ :
- Hai hình chữ nhật có cùng chu vi nhưng khác diện tích.
  - Hai hình chữ nhật có kích thước khác nhau nhưng cùng diện tích.
21. Cho hình bình hành ABCD (h.183). Từ A và C kẻ AH và CK vuông góc với đường chéo BD. Chứng minh rằng hai đa giác ABCH và ADCK có cùng diện tích.



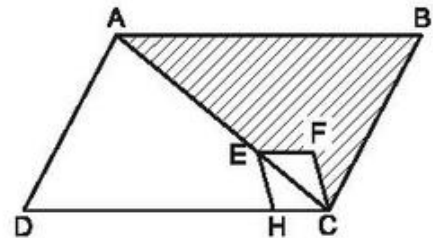
Hình 183



Hình 184

22. Cho hình bình hành ABCD (h.184). Đường phân giác của các góc A và C cắt đường chéo BD tại E, F.
- Chứng minh rằng hai hình ABCFE và ADCFE có cùng diện tích.
  - Các hình đó có phải là đa giác lồi không? Vì sao?

23. Trên hình 185, các tứ giác ABCD và EFCH đều là hình bình hành. Điểm E nằm trên đường chéo AC.



Hình 185

- Chứng minh rằng đa giác AEHD và hình ABCFE có cùng diện tích.
- ABCFE có phải là đa giác lồi không? Vì sao?

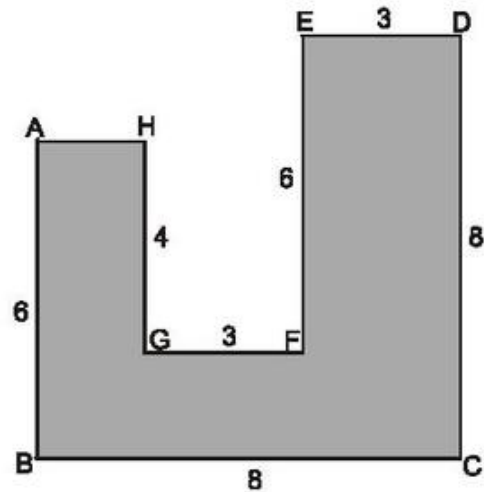


24. Cho một tam giác vuông cân. Chứng minh rằng tổng diện tích của hai hình vuông dựng trên hai cạnh góc vuông bằng diện tích của hình vuông dựng trên cạnh huyền (không sử dụng định lí Py-ta-go).

### Bài tập bổ sung

- 2.1. a) Nền của một phòng học có dạng hình chữ nhật, với chiều rộng đo được là 4m và chiều dài là 6m. Để có thể lát kín nền đó cần bao nhiêu viên gạch có hình vuông, với cạnh là 33,33cm ?

- b) Cần bao nhiêu viên gạch có hình vuông, với cạnh là 25cm để có thể lát kín một mảnh sân có dạng như hình bs.23 (biết  $AB = 6m$ ,  $BC = 8m$ ,  $CD = 8m$ ,  $DE = 3m$ ,  $EF = 6m$ ,  $FG = 3m$ ,  $GH = 4m$  và góc tại các đỉnh A, B, C, D, E, F, G, H đều là góc vuông) ?



Hình bs.23

- 2.2. a) Dùng diện tích để chứng tỏ :  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .  
 b) Dùng diện tích để chứng tỏ :  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  với điều kiện  $b < a$ .
- 2.3. *Đố vui.*  
 a) Có thể dùng kéo cắt 1 lần và chỉ cắt theo đường thẳng, chia một hình chữ nhật thành hai mảnh để ghép lại được một tam giác vuông hay không?  
 b) Có thể dùng kéo cắt 2 lần và chỉ cắt theo đường thẳng, chia một hình chữ nhật thành ba mảnh để ghép lại được một tam giác thường hay không?

### §3. Diện tích tam giác

25. Hai đường chéo của hình chữ nhật chia hình chữ nhật thành bốn tam giác. Diện tích của các tam giác đó có bằng nhau không? Vì sao ?
26. Cho tam giác ABC có đáy BC cố định và đỉnh A di động trên một đường thẳng d cố định song song với đường thẳng BC. Chứng minh rằng tam giác ABC luôn có diện tích không đổi.
27. Tam giác ABC có đáy BC cố định và dài 4cm. Đỉnh A di chuyển trên đường thẳng d ( $d \perp BC$ ). Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống đường thẳng BC.

*Chịu trách nhiệm xuất bản :* Chủ tịch Hội đồng Thành viên **NGUYỄN ĐỨC THÁI**  
Tổng Giám đốc **HOÀNG LÊ BÁCH**

*Chịu trách nhiệm nội dung :* Tổng biên tập **PHAN XUÂN THÀNH**

*Biên tập lần đầu :* **PHẠM BẢO KHUÊ - NGUYỄN TRỌNG THIỆP**

*Biên tập tái bản :* **NGUYỄN TRỌNG THIỆP**

*Biên tập kỹ thuật và trình bày :* **NGUYỄN THANH THUYẾT - ĐINH XUÂN DUNG**

*Trình bày bìa :* **BÙI QUANG TUẤN**

*Sửa bản in :* **ĐẶNG MINH THU**

*Chế bản :* **CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI**

---

## **BÀI TẬP TOÁN 8 - TẬP MỘT**

Mã số : 2B803T0

In.....bản (QĐ ...), khổ 17 x 24cm.

Đơn vị in: ... địa chỉ ...

Cơ sở in: ... địa chỉ ...

Số ĐKXB: 01 - 2020/CXBIPH/157 - 869/GD

Số QĐXB: ... /QĐ-GD ngày ... tháng ... năm ...

In xong và nộp lưu chiểu tháng ... năm 201...

Mã số ISBN : Tập một : 978-604-0-18436-8

Tập hai : 978-604-0-18437-5